Avertissement — Mode d'emploi

Ce polycopié ne constitue pas un cours au sens classique de ce terme, mais plutôt un support à celui qui sera dispensé en classe. En particulier, toutes les démonstrations ne sont pas faites (certaines ne sont même pas esquissées), et, le plus souvent, aucun exemple n'est traité ; de plus, de nombreuses pistes de réflexion sont ouvertes, mais non développées ; ainsi, il est souvent proposé d'essayer de résoudre un exercice simple ou de réfléchir à une difficulté apparente, c'est pourquoi il est recommandé, dans la mesure du possible, de lire chaque chapitre **avant** que celui-ci ne soit exposé par l'enseignant ; on devrait ainsi se familiariser avec les idées générales, les motivations ayant donné naissance aux nouveaux concepts introduits, et aussi commencer à apprivoiser les difficultés techniques et théoriques qui seront rencontrées.

La typographie choisie doit faciliter ce travail : les notes et les textes écrits en petits caractères peuvent sans inconvénient être laissés de côté en première lecture ; des passages qui sont, officiellement, seulement au programme de la Spé (ou même complètement hors-programme), mais qu'on a jugé pouvoir éclairer le cours, ou le compléter utilement, sont accompagnés en marge d'un filet ondulé (comme ici). Les marges sont larges et le texte est distribué en feuillets séparés et imprimés d'un seul côté ; n'hésitez pas à l'annoter et à le surligner, à l'insérer dans le classeur où vous prenez le cours en note : c'est un outil de travail et non un objet de décoration !

La plupart des chapitres sont suivis d'un «formulaire», présentant sous forme synthétique les résultats (et aussi les définitions) essentiels, et donnant parfois aussi des résumés de méthode ; toutefois il est probablement plus rentable de tenter de constituer ses propres fiches de résumé, quitte à vérifier, à l'aide du formulaire, que rien d'important n'a été oublié : on retient mieux ce que l'on a rédigé soi-même, et c'est aussi un bon moyen d'apprendre à énoncer une définition ou un théorème, par exemple (l'apprentissage par cœur des phrases d'un manuel étant le plus souvent une tâche presque impossible, et d'un intérêt tout relatif).

Les exercices (dont le «mode d'emploi» figure à la fin du premier chapitre, page 17) doivent être abordés après la lecture des fiches d'exercices-types correspondants (quand elles existent) ; les énoncés de ces fiches ont donc été rappelés à l'endroit convenable. Il est recommandé de s'être au moins sérieusement attaqué, dans chaque chapitre, à tous les exercices de niveau ($\star\star$) ou plus faciles.

Le premier chapitre joue un rôle à part (et d'ailleurs, les résultats de logique qui y sont exposés sont officiellement «hors-programme») : il s'agit à la fois d'une présentation générale des méthodes et des objectifs des mathématiques, et de la mise au point de certaines conventions de langage et d'écriture. On aura intérêt à le parcourir dès le début de l'année, puis à le relire après quelques mois (ce qui permettra, au demeurant, de mesurer les progrès accomplis). Plus généralement, les six premiers chapitres exposent l'ensemble des «bases» nécessaires à tout le cours, et devraient donc être régulièrement revus, et (est-ce utile de le dire ?) parfaitement maîtrisés avant la fin de l'année.

PLAN GÉNÉRAL DU COURS

TECHNIQUES GÉNÉRALES

ANALYSE

ALGÈBRE LINÈAIRE

GÉOMÉTRIE

1. LE LANGAGE MATHÉMATIQUE

Ce chapitre joue un rôle un peu à part dans le cours : il introduit des méthodes et un langage général, mais beaucoup des idées abordées paraîtront obscures, artificielles, ou inutilement pointilleuses; c'est hélas inévitable quand on débute, et il sera nécessaire de le relire régulièrement, en particulier après que des démonstrations difficiles (par exemple celles des chapitres 6, 9, 12, etc.) aient montré la nécessité et l'intérêt de toutes les précautions exposées ici.

1 Introduction : mathématiques et mathématiciens.

1.1 Un peu d'histoire.

Dans toutes les civilisations nous ayant laissé des traces écrites, on sait que des activités de nature mathématique ont été pratiquées, depuis les dénombrements des hommes et des richesses que réclamaient les premiers grands empires (Égypte, Chine, mais aussi Incas et Mayas) jusqu'aux calculs astronomiques très complexes demandés par des religions fondés sur l'observation des planètes (Mésopotamie) ou des éclipses (Chine). Mais ce n'est qu'en Grèce (peut-être sous l'influence des techniques de discussion qu'inventaient au même moment les premiers avocats et les premiers hommes politiques) qu'est apparu l'intérêt de justifier les méthodes de calcul et de tracés géométriques qui étaient déjà bien maîtrisées, mais que l'on percevait jusque là comme des «recettes de cuisine», dont la valeur tenait dans la constatation empirique qu'elles «fonctionnaient». C'est alors que sont apparues ces «longues chaînes de raisonnements» (Descartes) qui ne devaient d'abord servir qu'à convaincre les sceptiques, et dont la prodigieuse puissance de production de résultats nouveaux (et utiles) a donné naissance (à partir de la Renaissance) aux méthodes mathématiques de la Physique, mais aussi à de nombreuses disciplines abstraites (les mathématiques «modernes») dont l'intérêt, même pratique, n'a plus cessé de croître.

1.2 De quoi parlent les mathématiciens ?

Très tôt, les mathématiciens se sont rendus compte qu'ils n'aboutiraient à un accord que s'ils n'étudiaient que des objets parfaitement définis, en leur appliquant des modes de raisonnement admis par tous (l'ensemble de ces règles est souvent appelé la *logique* classique, ou aristotélicienne). Les nombres (entiers) et l'espace (ordinaire) ont paru aux Grecs (les premiers «vrais» mathématiciens, comme on l'a dit) ne poser aucun problème; la pratique et la réflexion des générations ultérieures ont permis d'élargir le domaine des mathématiques à d'autres objets («nombres» de plus en plus abstraits : réels, complexes, idéaux. . . ; fonctions; «géométries»; vecteurs et matrices; probabilités; graphes. . .), mais ont aussi fait apparaître des difficultés inattendues (par exemple les géométries non-euclidiennes, ou les paradoxes) qui ont obligé à des études très soignées de ce qu'on appelle les *fondements* des mathématiques; l'exigence de pouvoir justifier tout ce qu'on affirme en mathématique est à la base de tout ce travail, et cette exigence devrait en principe être partagée par toute personne s'y intéressant. . .

1.3 Un langage mathématique : pourquoi faire ?

L'exigence de rigueur dont on vient de parler a amené les textes mathématiques à se montrer de plus en plus précis et minutieux, ce qui, à son tour, a montré les limites du langage ordinaire (c'est d'ailleurs un phénomène que l'on rencontre dans toutes les disciplines scientifiques, ainsi qu'en philosophie). De plus, une systématisation des notations utilisées est progressivement apparue nécessaire. Àpremière vue, en effet, les conventions d'écriture des mathématiques (dont les formules algébriques sont les plus connues) ne sont qu'une sténographie commode, un ensemble d'abréviations que l'on pourrait à la rigueur remplacer par des phrases complètes en français. De fait, les mathématiciens grecs n'utilisaient aucun symbole spécial (pas même π, qui n'a été introduit, par Euler, qu'au 18$^{\text{ème}}$ siècle) ; mais la pratique a montré que le développement de l'algèbre (par exemple la résolution des équations du 3$^{\text{ème}}$ degré) n'est devenu possible qu'après l'invention (au 16$^{\text{ème}}$ siècle) des notations modernes. En effet, un ensemble bien conçu de notations se met en quelque sorte à «fonctionner tout seul» (les élèves ayant réussi à trouver par «automathismes*» la solution d'un problème dont ils n'avaient pas compris l'énoncé le savent bien !) ; tout se passe comme si la notation résumait l'effort de réflexion et les résultats de ceux qui l'ont inventée; nous rencontrerons un exemple spectaculaire de ce phénomène en étudiant les notations différentielles (dues à Leibnitz) au chapitre 10.

1.4 Et quelle est l'utilité pratique de tout cela ?

Les difficultés rencontrées lors des extensions successives des objets mathématiques (que ce soient l'apparition, jugée longtemps suspecte, de ces nouveaux nombres que sont les complexes, ou la méthode de calcul d'une dérivée, à présent bien comprise, mais qui suscita de violentes critiques au 17$^{\text{ème}}$ siècle) ont amené les mathématiciens à se méfier de leurs «intuitions» (comme on le verra dans le cours d'Analyse) ; les démonstrations rigoureuses de résultats qui semblaient évidents ont parfois fait apparaître des exceptions, allant jusqu'à demander la création de nouveaux outils mathématiques, et ceux-ci se sont souvent révélés d'une importance pratique considérable (un exemple récent étant la découverte des objets «fractals»).

De toute façon, les mathématiciens «purs» ne s'intéressent pas tant à obtenir des «résultats» qu'à en trouver des preuves, et la qualité «esthétique» de celles-ci est une partie importante de leur travail; on en verra des illustrations élémentaires en géométrie. Établir ces preuves avec le plus grand soin, et les mettre à l'abri de toute critique est un autre souci permanent des mathématiciens, et les exigences extrêmes de rigueur auquelles ils ont tenté d'obéir seront exposés en **4** ; cela les a amenés parfois à beaucoup d'efforts apparemment inutiles, et la lecture d'un exposé de mathématiques «élémentaires» ressemble souvent à un redoutable pensum, où de nombreuses pages sont consacrées à prouver de manière irréfutable des formules telles que $a+b=b+a$.

Toutefois, les utilisateurs font d'habitude confiance aux démonstrations des professionnels, et dans ce cours, nous ne reviendrons pas en général sur les résultats établis dans les classes du secondaire, sauf parfois pour montrer le chemin y amenant, ou pour obtenir sous une forme plus générale un résultat déjà connu.

De plus certains théorèmes (et souvent parmi les plus importants) ont une démonstration trop technique (ou parfois trop abstraite) pour que nous ayons le temps de

---

* Ce néologisme est dû à Stella Baruk, qui a étudié les mécanismes de l'échec scolaire en mathématique, et découvert l'importance de donner à l'élève l'accès au sens des notions étudiées.

l'exposer ici; on les donnera donc dans le cours sous le nom de *théorèmes admis* (en se contentant au mieux d'un embryon de justification); et on verra en **4.6** comment il convient d'utiliser un résultat de ce genre.

Ces entorses à un exposé parfaitement rigoureux pourraient laisser croire qu'en définitive tout cela n'a pas une si grande importance que les mathématiciens veulent le faire croire; il n'en est rien, mais seule une longue pratique a permis de mettre en évidence les dangers que la perte de la rigueur fait courir, et dont certains aspects seront abordés en **4.8**. Il ne faut pas oublier non plus que nous discutons ici des moyens de présenter les résultats obtenus (ce qui, presque par définition, se doit d'entraîner une conviction complète), et non des moyens de les obtenir, et on constate souvent, en lisant les brouillons des plus grands mathématiciens de l'histoire, qu'ils sont arrivés à leurs théorèmes en utilisant des idées et des méthodes bien éloignées de la rigueur et de la logique; nous verrons d'ailleurs comment les outils informatiques permettent de nos jours de «deviner» de nombreux résultats, et de formuler de nouvelles hypothèses. Cela dit, une fois un résultat découvert, l'essentiel, pour le mathématicien, reste encore à faire : il faut le prouver !

Finalement, la rigueur reste, pour celui qui veut faire des mathématiques (par opposition à l'utilisateur, physicien par exemple, qui a ses propres exigences, et qui cherche seulement à obtenir des résultats «exacts», sans se soucier de «preuves», ou plutôt en acceptant le recours à des arguments «pratiques», tels la vérification expérimentale) un objectif indispensable, même si une rigueur parfaite est inaccessible, et serait de toute façon probablement inutilisable. On verra en **4** quel est le minimum en deçà duquel on ne fait plus de mathématiques, mais «autre chose».

2 Les notations.

Les règles dont nous allons parler s'appliquent (en gros) à tous les domaines des mathématiques, mais nous prendrons pour l'essentiel à partir de maintenant nos exemples en algèbre et en analyse; quelques généralisations et précisions seront données aux chapitres 7 et 21.

2.1 Lettres.

Les objets dont s'occupe le mathématicien doivent être désignés, et en principe chaque objet a donc un nom, par exemple l'ensemble des nombres rationnels s'appelle $\mathbf{Q}$; malheureusement la tradition veut (à de rares exceptions près) que ces noms ne comportent qu'une seule lettre (de façon à permettre en algèbre par exemple d'avoir $bac = abc$); cela amène les mathématiciens à se montrer gros consommateurs de lettres (majuscules et minuscules, indicées, grecques, etc.) et reste fort peu pratique. L'apparition d'un langage informatique utilisant des noms «aussi longs qu'on veut» va peut-être créer de nouvelles habitudes; en attendant la règle est :

1) de préciser le sens de toute lettre utilisée, la même lettre servant en général à un nouvel usage dès qu'on change de paragraphe (exception faite des lettres «réservées» telles que $e, i, \pi, \mathbf{N}, \dots$);

2) d'essayer d'utiliser les lettres de manière «systématique», c'est-à-dire toujours avec la même signification générale (comme on le verra en **3.4**); cette dernière exigence s'avère en pratique difficile (penser aux multiples utilisations de x) et on aura donc intérêt à s'entraîner à «traduire», par exemple à résoudre une équation du genre $ap^2 + bp + c = 0$ (où, bien sûr(?), p désigne l'inconnue).

2.2 Formules, écritures emboîtées.

Les lettres ne permettant de parler que d'objets déjà connus (c'est par exemple l'intérêt principal des «constantes», voir **3.4**), il est nécessaire de disposer aussi de «symboles d'opérations», que ce soit les signes ($+, -, \times, \div$) des «quatre opérations», devenus si familiers qu'on oublie qu'il a bien fallu les inventer (Viète, vers 1540) ou la notation (d'ailleurs fort malcommode) des intégrales, due à Leibnitz (vers 1650). La caractéristique essentielle de ces notations, outre qu'elles permettent de «fabriquer» de nouveaux objets à partir de ceux qu'on a déjà, est d'être (suivant un vocabulaire récent qui vient lui aussi de l'informatique) «récursives», c'est-à-dire qu'on peut les combiner et les emboîter indéfiniment.

Ainsi, le sens d'une expression telle que :

$$\frac{\ln\,\ln\,\ln(e^{\cos(\cos x^2)} + 3 - x^2) + \tan x}{1 - x^x}$$

n'est (si on suppose x connu) qu'un exercice (fastidieux!) de «mise à plat», c'est-à-dire qu'il faut pouvoir reconstituer l'ordre des calculs (pour les faire exécuter par une calculette, par exemple, sous une forme telle que : `1-X`x^y`X`$\rightarrow$`A: e(cos cos (XX))+3-XX`$\rightarrow$`B: (ln ln ln B) ÷A)`; ce qui est facile, à condition toutefois de connaître les «règles de priorité» à utiliser (elles seront rappelées au chapitre 2, puis précisées chaque fois qu'on rencontrera une notation nouvelle) et la signification de chaque «opération» utilisée (ici : ln, cos, tan et a^b). On remarquera au passage sur ce seul exemple combien les mathématiciens s'autorisent d'exceptions; elles font le cauchemar des débutants : qui n'a jamais eu la tentation de «simplifier par cos» une expression telle que $\dfrac{\cos x}{\cos y}$?

2.3 Notations fonctionnelles.

La plus importante de ces exceptions est la notation du calcul d'une fonction (techniquement, de la valeur de l'image d'un objet par une fonction, comme on le verra au chapitre 7). Si f est le nom de la fonction (ce qui veut dire que f est un «procédé de calcul» du genre de «élever au carré et ajouter 1», ce qu'on note, bien sûr, $f\colon x \mapsto x^2+1$), $f(a)$ est l'image par f de a (c'est-à-dire, dans notre exemple, le nombre $a^2 + 1$); outre le danger évident de confusion avec une multiplication, la difficulté bien réelle d'abstraction de cette notion (f n'est pas un nombre, mais un processus de calcul) est masquée par l'apparente aisance de la manipulation de l'écriture, et c'est tout un travail d'apprendre à faire la différence entre la fonction cos et le nombre $\cos x$ (dépendant de x); ce qui n'est certes pas facilité par les exceptions d'écriture (oubli des parenthèses, noms de trois lettres ...) qui justement sont nombreuses dans cette branche des mathématiques.

2.4 Abréviations, abus d'écriture.

Et d'ailleurs, c'est évidemment dans un but de simplification qu'on s'autorise des abréviations, et aussi des abus d'écriture, c'est-à-dire des «oublis» de signes en principe obligatoires, dans tous les cas où on pense le lecteur (à commencer par soi-même, en se relisant) capable de reconstituer sans erreur les éléments manquants. Ainsi, par exemple, c'est pour gagner du temps et de la place qu'on note $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ce qu'on devrait écrire $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$. Mais le risque d'erreur et de confusion en est évidemment augmenté; chacun doit pour son compte apprendre à reconnaître les situations qui lui font commettre des erreurs, et à tenter d'être plus vigilant quand elles surviennent.

3 Le sens.

3.1 Univers de validité, domaines numériques, domaines de définition.

Si une lettre n'a pas de «valeur» déjà connue dans un texte mathématique, le sous-entendu est que ce qui est écrit est valable pour toute valeur possible de cette lettre. Mais en réalité, aucune affirmation intéressante ne pourrait être vraie de manière aussi générale; on se restreint en principe à un domaine de valeurs bien précis, appelé «univers de validité». Par exemple, la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ n'a de sens que si x est un nombre réel (elle est vraie si x est complexe, en étendant un peu le sens de cos et sin; mais que pourrait-elle signifier si x était une droite, ou un vecteur ?); ce genre de sous-entendu est en général clair d'après le contexte (c'est encore un exemple d'abus de langage) mais devrait en principe être précisé.

Les ensembles de nombres les plus utilisés comme univers (appelés encore *domaines numériques*) ont reçu des noms : **N, Z, Q, R, C** sont bien connus; on verra au chapitre 6 les notations (ensemblistes) permettant de fabriquer des ensembles plus compliqués. Pour ne pas alourdir l'écriture, on se permet cependant d'écrire des formules telles que $\ln(1 - \sqrt{1+x})$, alors qu'on ignore encore pour quelles valeurs de x elles ont un sens. Le sous-entendu dans ce cas est que x est un nombre réel tel que le calcul indiqué soit possible (ce qui ici veut dire que x appartient à l'intervalle $[-1; 0[$; cet intervalle est ce qu'on appelle le *domaine de définition* (ou d'existence) de l'expression). En principe, on devrait refuser de continuer les calculs ou l'étude tant que le domaine n'est pas précisément connu, pour éviter les problèmes qui vont être abordés au paragraphe suivant, mais on s'autorise parfois (nouvel abus de langage) à admettre provisoirement que ce dont on parle est défini, quitte à y revenir ensuite; pour une formule telle que celle de **2.2**, il serait d'ailleurs difficile de faire autrement !

3.2 «$\frac{1}{0}$; $\frac{0}{0}$; $\sqrt{-1}$; $\ln 0$...» : quand l'écriture perd son sens.

Et au fait, pourquoi ne peut-on pas écrire $\frac{1}{0}$? Il est important de bien distinguer, dans ce genre d'interdictions :

- ce qui relève d'une convention (par exemple, on convient qu'une racine carrée est toujours positive, mais en fait -2 et 2 ont tout aussi bien pour carré 4, et le choix de 2 comme **la** racine carrée de 4 est donc arbitraire, on le verra bien d'ailleurs en étudiant la même question dans **C**); une telle convention ne fait pas perdre son sens à l'écriture qui ne la respecte pas, mais la rend simplement fausse, comme dans $\sqrt{x} < 0$.
- ce qui met en lumière une impossibilité
  - provisoire comme le fait de trouver un nombre dont le carré soit -1 (c'est impossible dans **R**, d'où l'interdiction de la notation $\sqrt{-1}$, mais $i^2 = -1$ est légal dans **C**),
  - ou définitive, comme la solution de l'équation $0.x = 1$ (en tout cas, malgré des efforts considérables, on n'a jamais vraiment réussi à donner un sens utilisable à cela; ce qui s'en rapproche le plus est l'usage de «plus l'infini» comme limite de la forme «$\frac{1}{0}$», et le chapitre 8 montrera les nombreuses précautions d'emploi indispensables).

Finalement, ce qui «interdit» vraiment d'écrire $A = \frac{1}{0}$, c'est qu'on aurait alors $0.A = 1$, puis $0.A = (0 + 0).A = 0.A + 0.A$, donc $1 = 2$; arrivé là, ou bien on renonce à faire des mathématiques cohérentes (voir **4.6**), ou alors on renonce à A !

Ce genre d'absurdité a une fâcheuse tendance à survenir (voir **4.8**) dès qu'on continue les calculs avec des notations «privées de sens»; mais parfois, au contraire, le problème vient de ce que le sens existe bien, mais est «ambigu» : c'est le cas des notations du genre $x = 1 \pm a$: il est raisonnablement clair que x désigne l'une des deux valeurs possibles, mais le danger d'une telle écriture apparait dès qu'on veut simplifier une expression telle que $\dfrac{1 \pm x}{2 \pm x}$, par exemple. C'est d'ailleurs ce qui «interdit» l'autre type de division par zéro : si $A = 0/0$ c'est (par définition) que $0.A = 0$, mais comme c'est vrai de tout A, on n'est pas plus avancé! (En d'autres termes, $0/0$ est *indéterminé*, comme on le reverra (d'un autre point de vue) quand on étudiera les limites).

Toutefois, les mathématiciens s'autorisent un autre type d'existence : il s'agit de celle définie par théorème. Ainsi, soit à résoudre l'équation $x^2 = 2$. Elle n'a pas de solution numérique évidente, et les Grecs ont découvert qu'elle n'avait pas de solution rationnelle, c'est-à-dire de la forme p/q, avec p et q entiers. Pourtant, elle a une solution «géométrique» : la diagonale du carré de côtés 1 (d'après le théorème de Pythagore); c'est donc bien que «racine de 2» doit «exister». On rencontrera des arguments analogues en analyse (le théorème des valeurs intermédiaires est un exemple typique), et les mathématiciens s'accordent à considérer qu'un objet dont on a prouvé l'existence (à ce sens) et l'unicité est «bien défini» (ce que nous reverrons d'un autre point de vue en **4.2**), même s'il n'est pas possible en pratique de «l'expliciter» (Ainsi, la «valeur» de «racine de 2» $= 1,4142\ldots$ n'est pas vraiment utilisable (que faire des «...»?) et semblerait donc contredire les règles que nous venons de donner; elle ne sert qu'à rappeler au lecteur qu'on peut obtenir des valeurs aussi précises que l'on veut, et que $\sqrt{2}$ est donc bien défini).

3.3 Propriétés et relations.

Bien sûr, les mathématiciens vont ensuite parler des objets qu'ils ont nommés. La phrase mathématique typique dit quelque chose d'un objet, par exemple : «$2^{127} - 1$ est un nombre premier», ou «la fonction cos est paire» (on parle de *propriété* de l'objet); ou encore relie deux (ou plusieurs) objets, par exemple : «$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$», ou «la dérivée de cos est $-\sin$». Dans ce dernier cas, on parle de *relation* entre les objets; les plus fréquentes ont des symboles d'abréviation, tels que $=$, $\geq$ ou $\in$.

3.4 Le sens des lettres : constantes et variables, inconnues et paramètres.

Il est temps de clarifier le sens exact des lettres dans les expressions mathématiques; certes, elles désignent des objets, mais plusieurs situations bien distinctes sont possibles :

Tout d'abord, une lettre peut servir d'abréviation pour désigner un objet dont on connaît la «valeur»; ainsi si le nombre $(1+e)/(1-2e)$ (qui vaut environ $-0,838\ldots$) réapparaît plusieurs fois dans un calcul, on aura intérêt à le remplacer par une lettre unique (mettons A), qui ne prendra plus que cette valeur-là pour ce calcul. A est une *constante* et elle est introduite dans le texte par une phrase du genre de «Posons $A = (1+e)/(1-2e)$»; une telle déclaration peut toujours être faite, tant que A n'a pas été déjà utilisé, et elle est obligatoire si A n'est pas déjà connu (De façon plus générale, on doit préciser le sens de toutes les lettres qu'on utilise, sauf celles figurant déjà dans les énoncés des problèmes que l'on résout).

D'autre part, on est amené à utiliser des constantes pour des valeurs fixées, mais qu'il n'est pas utile de préciser, ou pour des valeurs à proprement parler inconnues, mais dont on sait qu'elles ne varieront pas durant le calcul (c'est par exemple le sens des lettres a, b et c dans la résolution de l'équation «générale» $ax^2 + bx + c = 0$).

On utilise autant que possible pour les constantes des lettres prises au début de l'alphabet.

Àl'opposé, on appelle *variable* une lettre qui désigne n'importe quel nombre (ou objet) dans l'univers de validité du texte. Ainsi, la «phrase» $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ est une relation entre deux expressions, supposée vraie (voir plus bas) pour toutes les valeurs possibles de x et y (réelles, par exemple), en prenant comme seule convention que x doit être remplacé par la même valeur partout où il figure (y aussi, bien sûr); c'est ce qui est précisé, si besoin en est, par des phrases du type «pour tous x et y éléments de $\mathbf{R}$».

Le sens apparent de x dans la «phrase» : «$3x^2 - 2x = 5$» semble le même. Mais en réalité, ce qui change est la nature de la phrase : celle-ci est à présent une question, réclamant une réponse : la liste de toutes les valeurs de x pour lesquelles la phrase est vraie (ici, -1 et $5/3$); la relation est une *équation*, et x s'appelle une *inconnue*; ce type de situation doit (normalement) être déclarée par «Résolvons l'équation... ; où x et y sont des inconnues (réelles)», et on peut même regretter qu'une notation différente (telle que $3x^2-2x \overset{?}{=} 5$) n'ait pas été adoptée, car une source importante d'erreurs vient de la confusion avec le cas précédent : devant l'affirmation $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$, il n'y a rien à «faire» (sauf peut-être chercher une preuve, voir plus bas); devant l'équation $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, il y a une réponse (l'ensemble des x rendant vraie l'égalité, c'est-à-dire $\mathbf{R}$!) à trouver...

On utilise pour les variables et les inconnues (réelles) les lettres de la fin de l'alphabet, mais ce n'est pas une obligation.

Dans certains cas, la frontière entre constante et variable devient floue; ainsi, si on a d'abord étudié un problème en supposant le nombre a fixé, puis qu'on essaie de voir ce que devient la solution quand a varie, on dit que a est un *paramètre*, et on dira que l'étude est faite «en fonction» de a. Dans le cas de la résolution d'équation, par exemple, une telle situation est généralement introduite par la formule «Résoudre et discuter en fonction de a l'équation... », qui signifie non seulement que la valeur (et le nombre) des solutions dépend de a, mais même que la méthode de résolution peut en dépendre; c'est par exemple le cas d'une équation telle que $ax^2 + (1-a)x = 1/(a+1)$ (avec x inconnu), où la question n'a pas de sens si $a = -1$, mais où la solution $x = 1$ correspondant au cas $a = 0$ ne saurait être (et pour cause) donnée par la «formule» de résolution des équations du second degré.

Cette notion de «variation» (qui vient, au demeurant, de la physique, où l'on dit par exemple qu'on fait varier les paramètres d'une expérience lorsqu'on modifie les conditions «environnementales» telles que la température ou la pression) amène à parler encore de paramètre(s) lorsqu'on veut «décrire» par exemple un ensemble de points à l'aide de formules (les «équations paramétriques») donnant les coordonnées de chaque point en fonction de nombres variables.

Les paramètres sont souvent désignés par t et les lettres voisines.

3.5 Variables muettes; le principe de substitution.

Dans de nombreuses expressions et relations, certaines lettres jouent un rôle un peu à part : elles servent d'abréviations commodes, mais n'ont pas de véritable valeur. Ainsi, x n'apparaît pas en fait dans $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$ (qui est tout simplement une façon compliquée de noter le nombre 1/4), et cette intégrale pourrait tout aussi bien s'écrire $\int_0^1 t^3\,dt$: on dit que dans ces expressions, x et t sont des *variables muettes*. On ne peut cependant remplacer ici x que par une seule autre lettre (non déjà utilisée par ailleurs) : ni $\int_0^1 2^3\,d2$, ni $\int_0^1 (x+1)^3\,d(x+1)$ ne veulent dire grand chose (mais on verra au chapitre 13 comment contourner cette difficulté). Nous rencontrerons au chapitre 6 un autre important exemple avec les notations de sommations (telles que $\sum_{k=1}^{n} f(k)$). En revanche, dans toutes les «formules» (les relations, en fait) censées être valables pour toutes les valeurs (mettons réelles) d'une variable, comme le sont les «identités remarquables», on peut substituer librement n'importe quelle expression (désignant un nombre réel) à l'une de ces variables. Ainsi, dès que l'on sait que (pour tout x) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$ (comme nous le (re)verrons au chapitre 4), on peut en déduire non seulement que $\sin\pi/3 + \cos\pi/3 = \sqrt{2}\cos\pi/12$, mais que $\sin(2x+\pi/4)+\cos(2x+\pi/4) = \sqrt{2}\cos 2x$ (et il ne faudrait évidemment pas en conclure que $x = 2x+\pi/4\ldots$). Cette technique connue sous le nom de *substitution* (on dit qu'on a substitué $2x+\pi/4$ à x dans la formule) demande quelques précautions, et on conseille souvent au débutant de la rédiger (au brouillon) en deux étapes, en commençant par exemple par remplacer x par X, pour lui éviter des confusions regrettables.

4 Vérité et démonstrations.

4.1 Axiomes et théorèmes; hypothèses et conséquences; conjectures.

Quand on a compris que toute phrase mathématique a un sens, il reste à parler de l'essentiel : la recherche de la vérité. Les mathématiciens essaient de n'obtenir que des énoncés vrais, et pour cela de *démontrer* toutes leurs affirmations. Une démonstration est un discours conçu de telle sorte que si on le lit en étant suffisamment préparé (c'est-à-dire en connaissant le sens des mots employés, les résultats préliminaires utilisés, etc...), on est nécessairement convaincu de la vérité des conclusions, et les Grecs poussaient même l'exigence jusqu'à vouloir qu'on ne puisse plus émettre aucune objection, même en étant de mauvaise foi. C'est cette exigence qu'on appelle la *rigueur*.

Pour obtenir des vérités, qu'on appelle en mathématique des *théorèmes* (une fois qu'elles sont démontrées), il faut partir de quelque part. On suppose connues ou admises les propriétés «élémentaires» des objets les plus simples, par exemple le fait que tout entier soit pair ou impair (dans un texte mathématique «complet», même ces propriétés sont rappelées sous forme d'une liste d'axiomes) et on demande d'admettre en plus quelques *axiomes* : il s'agit de propriétés «naturelles» qu'on n'a pas su démontrer, l'exemple le plus connu étant l'axiome d'Euclide affirmant l'existence (et l'unicité) des parallèles.

Ces complications logiques ne doivent pas troubler l'utilisateur non mathématicien; elles n'ont été introduites que pour garantir contre des erreurs très subtiles, ou très peu probables. En pratique, il suffit de considérer comme acquis l'ensemble des résultats «élémentaires» acquis dans le secondaire, et seuls des esprits très exigeants pourront vouloir chercher à «fonder» (construire) toutes leurs connaissances mathématiques sur un nombre aussi petit que possible de principes sûrs. Cependant, et pour être tout à fait complet, il faudrait préciser qu'une recherche obstinée de fondations absolument sûres (ce qu'on a appelé le «programme de Hilbert») s'est avérée (de façon très surprenante) impossible, à la suite des travaux de Gödel (vers 1930), montrant que toute construction de ce type serait nécessairement incomplète; ces travaux, sans grandes conséquences mathématiques (quoique...) ont eu en revanche une importance philosophique considérable.

La plupart du temps, on n'essaie d'obtenir que des vérités relatives, de la forme : «si telle chose est vraie, alors telle autre doit l'être aussi». On dit que la deuxième propriété est *conséquence* de la première, ou encore que sous l'*hypothèse* (c'est-à-dire à la condition) que la première soit vraie, la seconde l'est aussi. Une telle hypothèse n'a rien d'incertain, c'est seulement une condition supplémentaire, sans laquelle ce qu'on affirme ne serait pas forcément vraie.

On dit parfois que l'hypothèse est une *condition suffisante* pour la conclusion (en d'autres termes, que la conclusion peut être fausse si l'hypothèse est fausse aussi, mais jamais si elle est vraie); avec ce vocabulaire, la conclusion est donc une *condition nécessaire* pour l'hypothèse (c'est-à-dire que la conclusion doit être vraie pour que l'hypothèse ait une chance de l'être.

Une «hypothèse» au sens qu'on lui donne en français, c'est-à-dire un résultat mathématique qu'on n'a pas encore prouvé (mais qu'on croit être vrai) s'appelle une *conjecture*. Il en existe de célèbres[1], parce que malgré tous les efforts de nombreux mathématiciens, elles résistent à la preuve ou à la réfutation (c'est-à-dire à la preuve de leur fausseté) depuis parfois plusieurs siècles; ainsi, la «conjecture de Goldbach» affirme que tout entier pair ≥ 4 est somme de deux nombres premiers, et depuis son énoncé au dix-huitième siècle, on n'a pas su la démontrer rigoureusement[2]; c'était, récemment encore, aussi le cas du «grand théorème de Fermat»[3]; plus modestement, devant un énoncé tel que «montrer que ...», l'étudiant est dans une situation de recherche où ce qu'on lui demande (la «conclusion») est pour lui une conjecture (et peut même être faux : il existe des erreurs d'énoncé !). Il faut résister à la tentation de partir de la conjecture pour la prouver, c'est-à-dire en somme de considérer comme vrai cela même qu'il s'agit de démontrer, car alors il est clair qu'on ne peut qu'obtenir des conséquences tout aussi incertaines; et le fait que ces conséquences soient vraies ne prouve rien (par contre, si elles étaient fausses, la conjecture le serait aussi, et cette importante technique de démonstration sera vue au paragraphe **4.7**); même si cette «méthode» peut donner des idées de démonstration, elle n'a aucune valeur de preuve, et son emploi s'appelle un «cercle vicieux».

---

[1] Au point que l'une d'entre elles est passée dans le langage courant : la quadrature du cercle (les géomètres grecs avaient proposé trois problèmes : construire un carré de même aire qu'un cercle donné, la trisection de l'angle, et la duplication du cube, en conjecturant l'impossibilité de ces constructions à la règle (non graduée) et au compas, ce qui ne fut démontré qu'au milieu du 19^eme^ siècle)

[2] Dans une lettre de Goldbach à Euler, en 1742, figure une affirmation équivalente (tout nombre impair est somme de trois nombres premiers); de nombreux travaux ont permis d'estimer ce résultat très vraisemblable (par exemple, il a été vérifié pour tous les entiers inférieurs à 10^{12}, d'autre part on a pu démontrer que tout nombre pair était somme de quatre nombres premiers), mais on n'en connaît pas encore de preuve rigoureuse

[3] Dans un livre de Diophante retrouvé dans la bibliothèque de Fermat après sa mort figurait en note l'affirmation de ce que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'avait pas de solutions entières non nulles pour $n \geq 3$ (contrairement à l'équation $x^2 + y^2 = z^2$, puisque par exemple $9 + 16 = 25$), et Fermat, le plus grand arithméticien du 17ème siècle, prétendait avoir trouvé une preuve «vraiment merveilleuse» de ce résultat, mais n'avoir pas assez de place dans la marge pour l'inscrire. La preuve de Fermat n'a jamais été retrouvé (on sait d'ailleurs à présent qu'il s'était lui-même rendu compte par la suite qu'elle devait être erronée !), et malgré l'apparente simplicité de cet énoncé, et les tentatives acharnées de tous ses successeurs, il aura fallu 350 ans pour que l'anglais Wiles en annonce la démonstration en juin 1993 (et le contrôle et l'acceptation de ses résultats par la communauté mathématique aura dû encore attendre jusqu'en mai 1995) !

4.2 Définitions et constructions.

Les objets et les propriétés auxquels les mathématiciens s'intéressent ne sont pas arbitraires, mais plutôt le résultat d'une histoire, faite de succès (souvent surprenants) de l'application des mêmes méthodes à des domaines très variés ; de ce fait, des noms ont été donnés à ces objets revenant fréquemment (le *module* d'un nombre complexe ou la *dérivée* d'une fonction sont deux exemples typiques). Contrairement aux démonstrations, qui doivent emporter l'adhésion du lecteur, et peuvent en principe être retrouvées si on les a oubliées, les *définitions* (c'est-à-dire les propriétés qui caractérisent le nouveau mot qu'on vient de définir) sont «arbitraires», et doivent donc être apprises «par cœur» (ou pourra toutefois accepter des formulations équivalentes, et provisoirement, mais avec beaucoup de prudence, des versions plus «intuitives» ; par contre, une liste d'exemples ne saurait en aucun cas remplacer une définition). Ainsi, la phrase «les couples (A, B) et (C, D) sont *équipollents* si et seulement si (A, C) et (B, D) ont même milieu» définit le mot «équipollent» (si du moins le sens des autres mots est connu) ; en principe, une telle phrase devrait être suffisante, mais même si le lecteur sait assez de grec pour deviner le sens «naturel» du mot (et d'ailleurs, celui-ci est souvent éloigné de son sens mathématique), il est clair que cette définition ne prendra son sens qu'après l'étude d'exemples (et que le lecteur qui n'aurait jamais vu de parallélogramme risquerait de se sentir perdu) ; on sera quelquefois amené dans ce cours (par exemple à partir du chapitre 15) à «parachuter» de telles définitions, en demandant la confiance du lecteur, qui ne pourra parfois voir l'intérêt de ces nouvelles notions que beaucoup plus tard.

De même qu'on doit partir de vérités «primitives», on doit aussi partir d'objets (et de relations) élémentaires. On choisissait en général comme «atomes» mathématiques les entiers (naturels) et leurs opérations, et parfois aussi les points de l'espace ordinaire; toutefois, depuis le début du $20^{\text{ème}}$ siècle, les mathématiciens ont plutôt décidé de partir de la théorie des ensembles. Dans tous les cas, les autres objets familiers des mathématiques (nombres réels, fonctions, etc.) doivent alors être construits, c'est-à-dire définis à partir des premiers, et éventuellement, ces définitions doivent s'accompagner de preuves de ce que les propriétés souhaitées sont bien vérifiées. De plus, la construction d'un objet (par exemple la définition de la fonction «logarithme népérien» comme étant la primitive de $x \mapsto 1/x$ s'annulant en 1) devrait en principe s'accompagner d'une démonstration d'existence **et d'unicité**, de façon à s'assurer que les mathématiciens parlent bien du même objet. Toutefois, la construction des objets «usuels» est hors-programme, et on ne trouvera donc pas dans ce cours de définition de $\mathbf{R}$ (mais il y figure par exemple une définition des polynômes).

4.3 Les symboles logiques : $\Rightarrow$, $\iff$; les quantificateurs.

Àpartir d'une phrase mathématique, il est possible d'en fabriquer d'autres à l'aide de «symboles logiques» ; ainsi, non-A est la phrase qui est vraie si et seulement si A est fausse; (A ou B) est celle qui est vraie si l'une des deux phrases (au moins) l'est : on dit que le «ou» mathématique est inclusif.

Les relations logiques entre la vérité de deux phrases sont symbolisés par les flèches : $A \Rightarrow B$ (qui se lit A *implique* B) veut dire que B est vraie chaque fois que A est vraie (mais B peut être vraie et A fausse, en d'autres termes, A est vraie *seulement si* B est vraie) ; $A \iff B$ (qui se lit A *équivaut à* B) veut dire que A et B sont équivalentes, c'est-à-dire vraies (ou fausses) en même temps (en d'autres termes, A est vraie *si, et seulement si,* B est vraie). Il est important de n'utiliser ces symboles que de manière rigoureuse, pour pouvoir écrire des «chaînes de raisonnements» de la forme

$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \ldots \Rightarrow Z$ (suivies en général de «et A est vraie, donc Z est vraie»). On vérifiera par exemple que si $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow A$, cela veut dire que A, B, C et D sont équivalents. L'usage des lettres A, B... dans ce qui précède est l'analogue, en logique, des variables en algèbre : c'est le début de ce qu'on appelle le calcul des propositions, dû à Boole (vers 1850). Ce calcul permet d'obtenir des résultats plus élaborés, par exemple, la «formule» $(A \Rightarrow B) \iff (\text{non-}A \text{ ou } B)$; on les reverra, en relation avec la théorie (élémentaire) des ensembles, au chapitre 7.

Un type fréquent d'affirmation concernant une propriété est : cette propriété est vraie pour tous les objets (de l'univers de validité), par exemple : «le carré de tout réel est positif». Les deux symboles $\forall$ et $\exists$ (qui se lisent «quel que soit» et «il existe»), appelés *quantificateurs*, servent à noter ces affirmations : ils ne doivent être utilisés que sous forme «complète» : ainsi, la phrase précédente se note $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ (ou plus précisément $(\forall x \in \mathbf{R})(x^2 \geq 0)$); et sa négation (fausse, évidemment) serait : $(\exists x \in \mathbf{R})(x^2 < 0)$ (c'est un bon exercice de logique de s'en convaincre). La manipulation rigoureuse de ces symboles est relativement délicate, et nous en verrons quelques exemples aux chapitres 7 et 9; il est important d'autre part de pouvoir «traduire» les expressions où ils figurent sous la forme de phrases françaises complètes.

4.4 Les éléments des démonstrations : donc, puisque, car, or, . . .

Une démonstration est donc un texte partant de faits supposés connus : théorèmes déjà établis, définitions et hypothèses; et enchaînant des déductions «évidentes» jusqu'à aboutir à une conclusion. Ainsi, le «modèle» d'un tel texte devrait être «On sait que A est vrai, donc B, donc C ..., donc Z est vrai également». Mais pour alléger la monotonie d'un tel discours, et aussi parce que certaines déductions sont plus complexes, ou moins linéaires, on est aussi amené à utiliser :

- «B, puisque A» (ou «B, car A») : renvoyant à un résultat déjà établi;
- «... donc B, or A...» : introduisant un nouvel argument;
- «... donc B, mais A...» : faisant apparaître une contradiction (voir **4. 7**);
- «... donc B (en effet, ...)» : complétant l'argument.

Cette dernière tournure ne devrait pas être nécessaire, mais (surtout pour les débutants) les enchaînements d'une démonstration ne paraissent pas toujours très logiques; cependant, en principe, tous les arguments utilisés dans une démonstration devraient être des conséquences évidentes (pour qui connaît, mettons, les éléments du sujet) de ce qui précède. S'il n'en est pas ainsi (et surtout si le «donc» utilisé paraît relier deux faits sans rapport entre eux), on parle d'affirmation «gratuite» : c'est évidemment une faute (de logique) grave.

4.5 Exemples et contre-exemples.

Un groupe très important d'affirmations est de la forme : «la propriété ... est toujours vraie» ou «$P(x)$ est vraie pour tout réel x» etc. Ce cas est d'ailleurs si fréquent qu'il constitue le sous-entendu usuel : si j'affirme l'identité $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, je sous-entends qu'elle est vraie pour tous les x et les y (du domaine de validité).

On a tendance à illustrer ce genre de phrase par des exemples; on dira : «tout entier est somme de quatre carrés, par exemple $19 = 4^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$». L'exemple sert à clarifier le sens de la phrase, et parfois à montrer le caractère naturel ou au contraire surprenant de l'affirmation, mais un exemple (et même de nombreux exemples) n'est pas une preuve; en effet l'affirmation est générale, donc censée être vraie pour une infinité d'objets, qu'un nombre fini d'exemples n'épuisent pas.

En revanche, un seul contre-exemple suffit à «démolir» une telle affirmation (en d'autres termes, à prouver qu'elle est fausse) : ainsi remarquer que pour la valeur $x = 3$ on a $3 + \cos 3 > -3 + \cos(-3)$ prouve sans autre argument que la fonction f définie par $f : x \mapsto f(x) = x + \cos x$ n'est pas paire (puisque «f est paire» signifie que pour tout x, $f(x) = f(-x)$). On verra en Analyse que certaines affirmations «naturelles», comme par exemple le fait que toute fonction dérivée est continue, sont en fait fausses; pour le montrer, on doit construire un contre-exemple (la fonction dérivée de $x^2 \sin(1/x)$ en est un), et les «monstres» ainsi obtenus ne doivent pas être sous-estimés : ils permettent entre autre de préciser les hypothèses supplémentaires que le théorème correct réclame.

4.6 Les méthodes de démonstration.

- *Décomposition en étapes.*

Comme on vient de le voir, chaque étape d'un raisonnement doit être claire, ce qui oblige à procéder à une décomposition d'une démonstration un peu longue en série de résultats plus simples à obtenir : on parle de «résultat préliminaire» (le terme technique est : *lemme*); de conséquences, encore appelées *corollaires*; de résultats moins importants qu'un théorème, appelés *propositions*, souvent numérotées, et dont on résumera l'enchaînement en fin de démonstration par des phrases du genre : «d'après les propositions 1, 2 et 5, on a donc : ...».

On a intérêt, en rédigeant une démonstration un peu longue, à procéder de même, et même à annoncer à l'avance ce que l'on veut faire ensuite; la compréhension du lecteur en est facilitée; en résumé :

Démonstration (par étapes)

1. Rappeler les hypothèses de l'énoncé
2. Conduire la démonstration en partant de ce qui est connu (hypothèses, résultats évidents, théorèmes du cours) et en allant par étapes vers la conclusion
3. Justifier chaque étape :
   * Calculs développés quand ils ne sont pas évidents
   * Explicitation des théorèmes utilisés (voir plus bas)
   * Renvoi aux hypothèses
4. Énoncer clairement la conclusion, et éventuellement, réénoncer l'ensemble : «on a donc démontré que si ... (H)...; alors ... (C)...»

Certaines étapes demandent parfois le rappel d'une définition, ou l'utilisation d'un théorème déjà démontré. On ne sait pas toujours bien rédiger dans ces cas-là :

- *Utilisation des définitions.*

Dans de nombreux énoncés, on demande de montrer qu'un objet est d'un certain type, par exemple de prouver qu'une fonction donnée est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il est clair qu'un tel énoncé ne peut être compris si on ne connait pas le sens des mots ou des symboles utilisés; il est extrêmement dangereux d'essayer de «bluffer», et on découvre par contre bien souvent* qu'il suffit de connaître la définition (dans cet exemple, cela

* Ne pas croire toutefois que **toutes** les questions de ce modèle soient faciles...

veut dire que la fonction est dérivable, que sa dérivée est elle-même dérivable, et ainsi de suite indéfiniment) pour pouvoir conclure immédiatement. Inversement, les hypothèses d'un énoncé permettent souvent de tirer des conséquences (dites «mécaniques») que l'on énonce par exemple ainsi : «L'objet X est (d'après l'hypothèse) un "A"; or, par définition, cela entraîne que ...» (on pourra éventuellement ne pas rappeler toute la définition, mais seulement les propriétés dont on a besoin).

- *Comment appliquer un théorème.*

On est souvent amené à utiliser un théorème général (c'est-à-dire, par exemple, valable pour toutes les fonctions dérivables) dans un cas particulier (une certaine fonction bien précise) qu'on est en train d'étudier. Le lecteur n'ayant pas nécessairement en tête tous les détails du théorème (sauf, mettons, pour les résultats «élémentaires» acquis dans les classes antérieures), il faut préciser ce que l'on fait; ainsi :

Application d'un théorème

1. Rappeler le théorème utilisé :

a) Son nom (ou son auteur) si on le connait; à défaut, une formule du genre "on sait que ..." n'est acceptable que si vous êtes sûr de la suite !

b) Son énoncé, et tout particulièrement les hypothèses restrictives sur son application (celles sans lesquelles le théorème n'est pas forcément vrai).

2. Montrer qu'on a contrôlé toutes ces hypothèses dans le cas qu'on étudie, par des phrases telles que : « or dans ce cas, la fonction.. est continue, puisque ... » ; ou « et on a vu auparavant que ... »

3. Traduire alors la conclusion du théorème par une phrase telle que : « dans le cas présent, on peut donc affirmer que ... »

Il n'est pas nécessaire d'être aussi rigoureux quand on veut seulement appliquer un résultat qu'on vient d'obtenir (ce qui se produit souvent dans des problèmes, où l'on demande d'appliquer à certains cas particuliers un théorème ou une méthode générale vue auparavant); seule l'étape 3 s'impose alors, après éventuellement une brève justification de 2.

- *Décomposition en cas.*

Il arrive qu'il ne soit pas possible de démontrer directement un théorème, ou même une formule, de manière générale, parce que certaines valeurs des variables amènent à des cas particuliers, ou à des calculs différents : un exemple bien connu est le traitement d'expressions contenant des valeurs absolues. Il faut alors se résigner à devoir «séparer les différents cas possibles», c'est-à-dire à dresser une liste complète de tout ce qui peut se produire, et à fournir une démonstration valable pour chaque cas.

Ce travail, souvent fastidieux et répétitif, peut être allégé par l'emploi de formules telles que «on voit de même que si ... , on a ... (en remplaçant... par...)», mais il faut faire très attention à n'oublier aucun cas, et à ne pas utiliser pour certains cas des arguments non valables : c'est une erreur qu'on commet souvent en géométrie, où il est facile de ne penser d'abord qu'au cas «le plus évident» (c'est l'un des pièges de la démonstration du type «on voit sur la figure que ...»), et aussi d'oublier que, par exemple, deux droites ne se coupent pas toujours !

Quand on veut seulement établir des résultats numériques (résolution d'équations, étude de fonction, etc.), on est souvent amené, pour alléger la lecture de la discussion, à établir un «tableau de cas» décrivant les différentes possibilités suivant les valeurs d'une variable ou d'un paramètre; on en reverra des exemples au chapitre suivant.

Bien que cette méthode puisse sembler ne soulever aucun problème théorique, elle laisse souvent le lecteur sur un sentiment d'insatisfaction (la démonstration semble «incomplète»). Ainsi, certaines situations inextricables n'ont pu être débrouillées qu'à l'aide d'ordinateurs : la démonstration, en 1978, du «théorème des 4 couleurs» a nécessité l'examen par ordinateur de près de 1500 cas distincts (les cas eux-mêmes avaient été déterminés «à la main», mais l'examen de chaque cas aurait pris des années à un mathématicien), et il est clair qu'aucun être humain ne la lira jamais en entier (du moins sous cette forme); quelle confiance peut-on faire alors à une telle preuve ?

4.7 Le raisonnement par l'absurde.

Il n'est pas toujours facile (ou même possible) d'obtenir directement certains résultats généraux; on est alors amené à analyser les propriétés d'un éventuel contre-exemple, jusqu'à montrer qu'elles seraient contradictoires; ceci prouvant que le contre-exemple ne peut exister.

Plus généralement, si on veut démontrer un théorème, on peut le supposer faux, et déduire conséquences après conséquences, jusqu'à obtenir un résultat «absurde» quelconque (du genre $0 = 1$); on en conclut que, le point de départ devant être erroné, le théorème était en fait exact, et on dit qu'on a démontré le théorème «par l'absurde».

Cette méthode a été la source de nombreux résultats importants d'impossibilité : sans elle, en effet, on peut toujours craindre que l'inexistence d'une méthode de résolution d'équation, par exemple, vienne de ce qu'on n'ait pas été encore assez astucieux pour en découvrir une; mais on a pu aussi l'utiliser pour obtenir des résultats «positifs» (la preuve d'existence d'une infinité de nombres premiers, due à Euclide, en est un exemple) qui soulèvent de délicats problèmes logiques. C'est enfin en tentant de prouver par l'absurde le postulat d'Euclide, et en ne parvenant pas à obtenir la contradiction souhaitée, que les géomètres du 19$^{\text{ème}}$ siècle (Riemann, Lobatchewsky, Poincaré, ...) ont découvert les géométries non-euclidiennes.

En résumé :

Démonstration par l'absurde

1. Énoncer clairement le projet : «On se propose de démontrer par l'absurde que "A"; pour cela, supposons que "la négation de A" soit vraie... »
2. Déduire alors (comme pour une démonstration ordinaire), à l'aide de cette hypothèse supplémentaire, des conséquences successives, dont la dernière est manifestement fausse (par exemple «$1 \neq 1$»)
3. Conclure : «or ceci est absurde, donc "A" est vraie.»

Un exemple historique célèbre, déjà évoqué plus haut, est la preuve de l'impossibilité de $x^2 = 2$ dans les rationnels : la démarche consiste à examiner les conséquences de $p^2 = 2q^2$ (p et q étant supposés entiers, et non tous deux pairs), jusqu'à aboutir à $p = 2p'$; $q = 2q'$.

On doit à Fermat une généralisation très astucieuse de cette idée : ayant à prouver un certain résultat général sur les entiers positifs, il suppose connu un contre-exemple N, et calcule jusqu'à obtenir un autre contre-exemple n, tel que $n < N$; or, conclut-il, ceci est absurde. Le lecteur voit-il pourquoi Fermat a appelé cette méthode «descente infinie» et ce qu'il y a au juste d'absurde ?

4.8 Le raisonnement par récurrence.

De nombreuses propriétés des entiers, et plus généralement des «suites» d'objets, sont difficiles à montrer directement, parce qu'on ne connait pas de formule explicite pour le $n^{\text{ème}}$ objet de la suite, ou tout simplement parce qu'un outil de calcul semble manquer : c'est le cas de nombreuses propriétés de divisibilité (voir le chapitre 6); ainsi, on ne voit pas bien comment démontrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 (ce qui est pourtant vrai) uniquement en manipulant la formule. Si l'on dispose d'une méthode de construction d'un objet à partir des précédents (ou d'une formule pour n à partir des formules pour les m précédents), il est toutefois possible de démontrer la propriété cherchée «de proche en proche» en la vérifiant d'abord pour les termes initiaux, et en montrant ensuite qu'elle est «héréditaire», c'est-à-dire que la méthode de construction garantit qu'elle est vraie d'un terme quand elle est déjà vraie pour ceux qui le précédent. Ainsi, dans l'exemple donné plus haut, il faudrait montrer comment on passe de $3^{2n} - 2^n$ à $3^{2n+2} - 2^{n+1}$, et pourquoi cela conserve la divisibilité par 7.

Pour obtenir une présentation systématique, il est commode de considérer ce qu'on veut démontrer comme une propriété de l'entier n, et de montrer qu'on peut alors passer du cas correspondant à k à celui correspondant à $k+1$. Une telle démonstration s'appelle une *démonstration par récurrence*; la formulation rigoureuse (ou plus précisément une formulation de base à laquelle toutes les autres peuvent se ramener, comme on le verra au chapitre 6) et un exemple typique sont donnés dans les deux encadrés suivant :

Pour démontrer par récurrence une propriété $\mathcal{P}(n)$

1. Annoncer le projet («on va démontrer par récurrence que ...»)
2. Vérifier que la propriété est vraie pour 0 («$\mathcal{P}(0)$ est vraie car...»)
3. Montrer que si $\mathcal{P}$ est vraie pour k, elle est encore vraie pour $k+1$: c'est en principe la partie délicate du raisonnement, et elle se présente sous la forme : «Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie (pour un certain k fixé) (ce qu'on appelle l'hypothèse de récurrence), alors ......, ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$» (ou «...ce qui équivaut à $\mathcal{P}(k+1)$»)
4. Conclure : «par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout n»

Un exemple

Montrons (par récurrence) que $1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$, pour tout n entier.

1) L'égalité est (évidemment) vraie pour $n = 0$, puisque $2 \times 0 + 1 = 1 = (0+1)^2$

2) Supposons qu'elle soit vraie pour $n = k$, c'est-à-dire (hypothèse de récurrence) que $1+3+5+\ldots+(2k+1) = (k+1)^2$; on aura alors $1+3+5+\ldots+(2k+1)+(2(k+1)+1) = (k+1)^2 + (2k+3) = k^2+4k+4 = (k+2)^2 = ((k+1)+1)^2$, ce qui est bien l'égalité souhaitée pour $n = k+1$

3) Par récurrence, l'égalité est donc vraie pour tout n

Cette technique, et les généralisations plus ou moins évidentes qu'on peut en faire, sera étudiée plus précisément au chapitre 6 : c'est en effet en combinaison avec les méthodes «combinatoires» (suites, sommations, etc.) que son emploi est le plus souvent nécessaire. On remarquera toutefois que la justification de telles démonstrations est encore un problème de logique «pure» (ce qui explique qu'on les présente dès ce chapitre), et que la règle qui les autorise est souvent appelée l' «axiome de récurrence», ce qui montre bien qu'une justification «absolue» en serait impossible*.

4.9 Pièges et faux raisonnements ; erreurs ; paradoxes.

Àne pas respecter les règles qui précèdent, on court le risque de n'avoir en fait rien démontré vraiment ; et parfois même d'aboutir à des résultats faux. On peut se consoler en se rappelant que les meilleurs mathématiciens ont commis des erreurs, qui, semble-t-il, quand elles ne résultent pas d'étourderies, viennent du désir d'obtenir un résultat dont on est convaincu, et dont la séduction fait perdre le sens critique ; ainsi d'innombrables «démonstrations» de conjectures célèbres (telle la fameuse «quadrature du cercle») ont-elles été publiées, et c'est parfois un travail difficile que de déterminer où se cache l'erreur, soit parce qu'elles utilisent subtilement ce qu'il s'agit de démontrer (cercle vicieux), soit parce qu'elles font appel à des notions «intuitives», apparemment évidentes, mais trompeuses ; c'est pour lutter contre cette tendance (où même des mathématiciens exceptionnels comme Euler s'étaient parfois égarés) qu'ont été mises en place (au $19^{\text{ème}}$ siècle) les méthodes rigoureuses de l'Analyse que nous verrons cette année.

Repérer les erreurs fait d'ailleurs partie intégrante du travail du mathématicien (et bien sûr, de l'étudiant) : nul n'en étant à l'abri, il n'y a pas de «faute» (morale) dans le fait d'en commettre, mais on peut blâmer le manque d'exigence amenant à ne pas s'en préoccuper, ou à ne pas chercher à les rectifier ! De nombreuses techniques de vérification ont été imaginées (et quelques-unes seront exposées à l'occasion de corrections d'exercices et de problèmes) ; s'il est en général relativement aisé de contrôler un calcul, il est plus difficile de déterminer une erreur de raisonnement ; un des outils importants est la construction de contre-exemples ; on apprendra aussi à mettre en doute une démonstration lorsque toutes les hypothèses de l'énoncé n'ont pas été utilisées...

D'ailleurs, il existe des «démonstrations» de résultats manifestement absurdes, soit créées à des fins pédagogiques (pour apprendre à «chercher l'erreur») (on verra en classe quelques exemples, illustrant le danger de ne pas suivre les méthodes de **4. 6** et **4. 7**, ou les règles de **3. 2**) ; soit pour montrer que telle ou telle notion «intuitive» provoque des difficultés, qu'on appelle des *paradoxes*.

Ainsi, les célèbres «paradoxes de Zénon» (Achille et la tortue, etc.) qui semblent «démontrer» que le mouvement est impossible, semblaient aux yeux des Grecs irréfutables (c'est-à-dire qu'ils ne parvenaient pas à déceler les faiblesses des arguments utilisés) ; les outils modernes (suites et limites, continuité, etc.) semblent avoir fait disparaître ces difficultés (mais est-ce absolument certain ?) ; en revanche, certains paradoxes modernes ne sont pas encore parfaitement élucidés : même au niveau de leurs fondations, les mathématiques sont encore inachevées !

---

* On peut pourtant remarquer qu'un raisonnement par l'absurde analogue à celui de Fermat semble démontrer l'axiome de récurrence : soit n le plus petit entier tel que $P(n)$ soit fausse ; on aurait une contradiction concernant $n-1$... Mais cela suppose que tout ensemble d'entiers possède un plus petit élément, et c'est précisément cette propriété qui doit être admise !

Mode d'emploi des exercices

(R) Testez vos réflexes : on doit pouvoir donner la réponse à ce type d'exercice presque instantanément, et justifier sa réponse en une ou deux lignes. Mais attention : ce sont souvent des pièges classiques !

($\star$) Exercice facile, ne demandant que d'avoir compris les bases du cours, ou calquant un exercice-type

($\star\star$) Exercice plus difficile, demandant un choix de méthode, ou des calculs plus complexes…

T 17 Ceci est un exercice-type, renvoyant à la fiche d'exercices-types n° 17 ; la difficulté en est, en général, équivalente à ($\star\star$), ou parfois un peu plus… Penser à lire les instructions générales concernant les exercices-types !

($\star\star\star$) Exercice "à astuce" ; ne pas se décourager (mais ne pas non plus perdre trop de temps) ; le corrigé sera d'autant plus enrichissant que vous aurez **vraiment** essayé.

($\star\star\star\star$) Exercice "hors-programme" (difficile, **et** correspondant à des passages marqués d'une bordure filetée) ; ne s'y frotter que si le reste vous a paru trop facile ?

Exercices

1 Notations.

1 ($\star$) Pourquoi peut-on écrire $a+b+c$, mais pas $a/b/c$? Qu'en pense votre calculette ? Quel est le sens de a^{b^c} ? Pouvez-vous en donner une justification ?

2 ($\star$) A-t-on le droit d'écrire $\cos x + 1 = 1 + \cos x$? Et $\cos x^2 = (\cos x)^2$? Et $\cos 2x = x \cos 2$?

3 ($\star\star$) Pourquoi peut-on écrire «Posons $a_1 = e^2$, …», mais pas «Posons $a_{0,5} = e^2$, …» ? Connaissez-vous un cas où l'écriture $a_{1/2}$ ait un sens ?

2 Le sens.

4 ($\star\star$) Donner la démarche à suivre pour déterminer le domaine (de définition) de l'expression «monstrueuse» de **2.2**. Est-il possible d'aboutir à un résultat explicite ?

5 ($\star\star\star$) À l'aide de la formule classique $2^{m+n} = 2^m 2^n$ (avec $m, n \in \mathbf{N}^*$), expliquez pourquoi on doit avoir $2^0 = 1$. Voyez-vous un argument analogue pour montrer que $9^{1/2} = 3$ (ou peut-être -3…) ? Et pour le calcul de 0^0 ? Et que peut-on reprocher à la formule $(-1)^{1/2} = i$?

6 ($\star$) «Résoudre l'équation $x + 2t = 3$». Êtes-vous sûr d'avoir compris le sens de la question ? Donner toutes les interprétations auxquelles vous pouvez penser, et les réponses correspondantes.

7 ($\star\star$) Que veut dire la phrase «Résoudre (et discuter suivant les valeurs du paramètre t) l'équation $x^2 - 2tx + 1 = 0$, où x est une inconnue réelle» ? (Et quelle est la réponse ?)

Et que signifie «Résoudre le système (S) :

$$(S)\begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 4x - y = \lambda y \end{cases}$$

(x et y inconnues ; λ paramètre)» ?

3 Vérité et démonstrations.

8 (R) «Toute fonction dérivable est continue, donc toute fonction continue est dérivable». Qu'en pensez-vous ?

9 (R) «Il est faux que $(a+b)^4 = a^4 + 4a^2b^2 + b^4$, puisque $2^4 = 16$ et que $1 + 4 + 1 = 6$». «Oui, mais c'est vrai avec $a = b = 0$». Que doit-on conclure ?

10 ($\star\star\star$) Démontrer que $x^3 = 2$ est impossible avec x rationnel ; la démarche du cours permet-elle de montrer que $x^2 = 5$ est impossible avec x rationnel ? (essayer de repérer l'argument le plus délicat, et terminer par une «séparation en cas»). Peut-on généraliser encore à $x^2 = n$?

11 ($\star\star\star$) Montrer, par récurrence, que $1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

LETTRES ET SYMBOLES MATHÉMATIQUES

Lettres grecques

(les plus courantes sont en caractères gras)

α, A **: alpha**	ι, I : iota	ρ, P **: rho**
β, B **: beta**	κ, K : kappa	σ, Σ **: sigma**
γ, Γ **: gamma**	λ, Λ **: lambda**	τ, T : tau
δ, Δ **: delta**	μ, M : mu	υ, U : upsilon
ε, E **: epsilon**	ν, N : nu	φ, Φ **: phi**
ζ, Z : zeta	ξ, Ξ : xi	χ, X : chi
η, H : eta	o, O : omicron	ψ, Ψ : psi
θ, Θ **: theta**	π, Π **: pi**	ω, Ω **: omega**

Logique

non-A (en algèbre de Boole, $\bar{A}$ ou $\neg A$) : négation de A, vraie si, et seulement si, A est fausse

A et B (en algèbre de Boole, $A \wedge B$) : conjonction, vraie si les deux le sont

A ou B (en algèbre de Boole, $A \vee B$) : disjonction, vraie si l'une au moins l'est (c'est le ou «inclusif»)

$P \Rightarrow Q$: P implique Q (si P est vrai, alors Q est vrai).

$P \iff Q$: P équivaut à Q (P est vrai si, et seulement si, Q est vrai).

$(\forall x)P(x)$: pour tout x, la propriété $P(x)$ est vraie.

$(\exists x)P(x)$: il existe (au moins) un x tel que la propriété $P(x)$ soit vraie.

$(\exists! x)P(x)$ (ou $(\exists_1 x)P(x)$) : il existe un x et un seul tel que $P(x)$ soit vraie.

$A \stackrel{\text{def}}{=} B$: on définit A comme étant égal à B.

$P \stackrel{\text{def}}{\iff} Q$: on définit P comme étant équivalent à Q.

Ensembles

$\emptyset$: ensemble vide

$\{a, b, \ldots\}$: ensemble des éléments $a, b, \ldots$

$a \in A$: a est élément de A

$A \cup B$: union de A et B

$A \cap B$: intersection de A et B

$A \subset B$: A est inclus (contenu) dans B

$\{a \in A \ / \ P(a)\}$: sous-ensemble de A formé des éléments vérifiant la propriété P

Fonctions

$g \circ f$: g «rond» f, le composé de f et g : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f \colon A \to B$: f «envoie» A sur B

$x \mapsto f(x)$: x a pour image (par f) l'objet $f(x)$

1. LE LANGAGE MATHÉMATIQUE

Plan