3. RAPPELS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Dans tout ce chapitre, le repère (cartésien) $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est supposé orthonormé; on suppose de plus que l'angle $\widehat{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}$ est positif.

1 Préliminaires.

Les propriétés géométriques classiques des figures du plan (telles que les théorèmes de Thalès et de Pythagore, ou le fait que les médiatrices d'un triangle se coupent en un même point) seront rappelées (et parfois redémontrées) à partir du chapitre 21. Ici, nous allons seulement nous intéresser aux outils de calcul permettant d'obtenir ces résultats en pratique, dans le but de pouvoir rapidement traiter, par exemple, les propriétés géométriques du plan complexe, ou encore en vue des applications à la physique et à la technologie. Nous supposons acquises les notions de vecteur, de repère (cartésien), et de coordonnées (une approche rigoureuse de ces notions sera faite à partir du chapitre 16), et nous conviendrons, d'une part, de représenter le vecteur $\mathbf{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et d'autre part le point M de coordonnées (x_M, y_M) (c'est-à-dire que $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$) par la notation $M\left| \begin{matrix} x_M \\ y_M \end{matrix} \right.$ (ces conventions seront généralisées à l'espace de manière assez évidente au chaître 21).

L'objectif principal des méthodes de la géométrie analytique est alors de remplacer la résolution d'un problème de géométrie par la résolution de systèmes d'équations «codant» ce problème (un exemple sera traité en **4. 3**). Cela suppose qu'on sache représenter les objets les plus courants (points, droites; cercles, etc.). Il y a essentiellement deux manières d'y parvenir : décrire l'ensemble des points d'une droite, par exemple, par des formules donnant leurs coordonnées en fonction d'un paramètre (on peut se les représenter comme donnant la description d'un mouvement (c'est l'interprétation cinématique), mais ce n'est nullement obligatoire); on parle alors de *système d'équations paramétriques*, tel que $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \end{cases}$. L'autre représentation consiste à donner une condition entre les coordonnées (telle que $xy = 1$), telle que cette condition est vérifiée si et seulement si le point appartient à la courbe; on parle alors d'*équation cartésienne* (de la courbe).

Nous aurons également besoin de quelques outils de calcul à partir des coordonnées, par exemple de formules donnant l'angle de deux droites, ou la distance de deux points; il s'avère que le moyen le plus efficace de les obtenir consiste à introduire le produit scalaire (dont nous justifierons rigoureusement les propriétés ultérieurement); un autre outil de calcul plus spécialisé aux questions de géométrie dans l'espace, le produit vectoriel (qui sera introduit en technologie), demanderait à ce stade que l'on admette trop de choses, aussi nous ne le construirons et ne justifierons ses propriétés qu'au chapitre 21.

2 Coordonnées, points et vecteurs.

Tout d'abord, rappelons que si $M = \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix}$ et $P = \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \end{vmatrix}$, on a $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix}$ («extrémité moins origine»), ce qui se démontre en revenant à la définition des coordonnées, et en utilisant la relation de Chasles : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$, ainsi, bien sûr, que les règles du calcul vectoriel : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ et $k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Un raisonnement analogue permet d'obtenir l'importante formule de changement de repère (ou plus précisément de changement d'origine; le cas général, où l'on change également les vecteurs du repère, ne sera abordé qu'au chapitre 22) : si $M = \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath},)$, les nouvelles coordonnées (x'_M, y'_M) du même point M dans le repère $\mathcal{R}' = (C, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (ce que l'on notera $M = \underset{\mathcal{R}'}{\begin{vmatrix} x'_M \\ y'_M \end{vmatrix}}$) sont données par les formules $\begin{cases} x'_M = x_M - x_C \\ y'_M = y_M - y_C \end{cases}$ (où les x_C, etc. sont les coordonnées du point C dans le repère $\mathcal{R}$, évidemment).

Les propriétés du calcul vectoriel permettent déjà d'obtenir quelques formules et résultats utiles; ainsi, si M est le milieu du segment $[AB]$, on sait que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$; on en déduit donc que

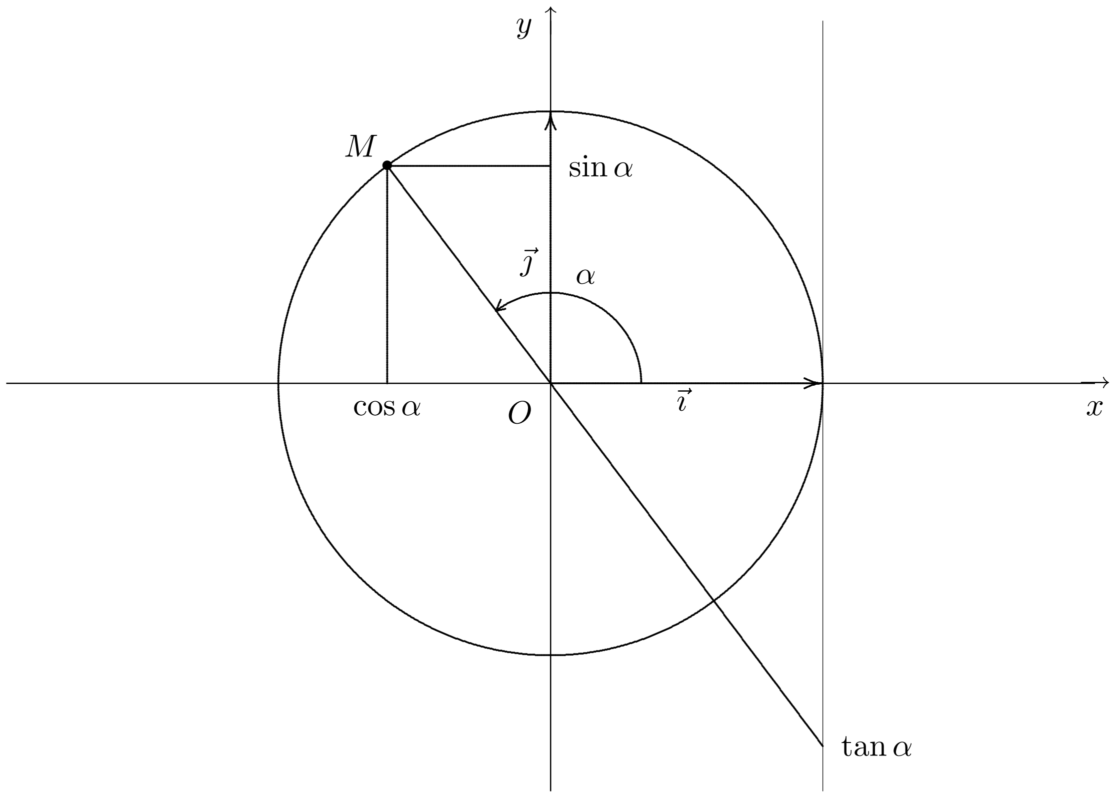
$$M = \begin{vmatrix} (x_A + x_B)/2 \\ (y_A + y_B)/2 \end{vmatrix}.$$

De même, (AB) et (CD) sont parallèles (ou confondues) si les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ (profitons-en pour rappeler que $\mathbf{v} = k\,\mathbf{u}$ n'autorise nullement à écrire $k = \mathbf{v}/\mathbf{u}$: il n'existe pas de «division vectorielle»). En particulier, M appartient à la droite (AB) si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; on en déduit la représentation paramétrique «canonique» de la droite (AB) : les points $M\begin{vmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{vmatrix}$ de cette droite sont donnés par $\begin{cases} x_M = x_A + k(x_B - x_A) = (1-k)x_A + kx_B \\ y_M = y_A + k(y_B - y_A) = (1-k)y_A + ky_B \end{cases}$, où k est un paramètre parcourant $\mathbf{R}$, et dont la valeur indique la position de M sur (AB), par exemple, M est entre A et B si et seulement si $0 < k < 1$ (nous verrons un exemple d'application de ces formules au chapitre 12, en étudiant la notion de convexité).

3 Le produit scalaire.

3.1 Rappels de trigonométrie.

On va seulement ici rappeler la définition des fonctions trigonométriques usuelles et quelques formules utiles; nous verrons au prochain chapitre comment utiliser les nombres complexes pour obtenir des résultats plus élaborés.



La définition historique de sin, cos et tan part des rapports de côtés de triangles rectangles, dont le théorème de Thalès montrre qu'ils ne dépendent que de l'angle considéré ($\cos\hat{A}$: côté adjacent à A/hypoténuse, $\sin\hat{A}$: côté opposé/hypoténuse, $\tan\hat{A}$: côté opposé/côté adjacent) ; cela permet déjà d'obtenir les valeurs «remarquables» des sinus, cosinus et tangentes des angles de $\pi/6$, $\pi/4$ et $\pi/3$, comme on le retrouvera en classe. Une analyse élémentaire montre alors que le point M du cercle trigonométrique (le cercle de centre O et de rayon 1) tel que $(\widehat{Ox, OM}) = \alpha$ (si α est un angle aigu positif) a pour coordonnées $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, ce qui permet de définir ainsi cos et sin pour tout α (et tan par $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$, quand $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$; le point d'intersection de la droite (OM) et de la droite d'équation $[\![X = 1]\!]$ a pour ordonnée $\tan\alpha$) ; l'étude de la notion d'arc (algébrique) permet enfin de généraliser à tout α réel : on définit d'abord la mesure de l'angle (orienté) $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$ par l'arc $\widehat{AB}$ découpé sur le cercle trigonométrique par les deux vecteurs $\overrightarrow{OA} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ et $\overrightarrow{OB} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, et on définit une unité d'angle, le radian, telle que si les angles sont exprimés en radians, on a $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \widehat{AB}$ (si on mesurait en degrés, par exemple, on obtiendrait $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})_{degrés} = \dfrac{180}{\pi}\widehat{AB}$). Remarquant alors que, réciproquerment, l'angle de mesure α est le même que l'angle de mesure $\alpha + 2\pi$, on obtient des fonctions trigonométriques définies sur $\mathbf{R}$ tout entier, et qui sont de période 2π (nous les étudierons plus précisément au chapitre 5).

Profitons-en pour remarquer l'importante relation de Chasles pour les angles du plan : $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) + (\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}) = (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{w}})$ (à 2π près) ; elle est presque évidente si l'on utilise les arcs ; attention toutefois : elle est complètement fausse dans l'espace, comme on s'en convaincra aisément en essayant de l'appliquer aux trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$.

On déduit facilement de l'étude de la représentation graphique des fonctions trigonométriques (et du théorème de Pythagore) que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, ainsi que les formules de parité $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; un raisonnement de symétrie autour de la première bissectrice permet d'obtenir de même l'utile formule $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$. Mais ces formules ne sont en fait que des cas particuliers des formules d'addition des angles, que nous verrons au prochain chapitre.

On peut enfin montrer aisément que si $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire, si $\alpha = (\widehat{\mathbf{u}, \overrightarrow{OM}})$, et si H est le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O, \mathbf{u})$, on a (formule de projection sur un axe) $\overline{OH} = OM.\cos\alpha$.

3.2 Définition et propriétés du produit scalaire.

Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et si $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on appelle *produit scalaire* de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, et l'on note $\mathbf{u}.\mathbf{v}$, le nombre réel $xx' + yy'$. Le produit scalaire se comporte un peu comme la multiplication usuelle, c'est-à-dire qu'on a $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$ («commutativité»), $(k\,\mathbf{u}).\mathbf{v} = k(\mathbf{u}.\mathbf{v})$, et $\mathbf{u}.(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}.\mathbf{v}+\mathbf{u}.\mathbf{w}$ («distributivité»), mais les autres formules usuelles, soit ne veulent rien dire ($\mathbf{u}.(\mathbf{v}.\mathbf{w})$ n'a pas de sens, puisque $\mathbf{v}.\mathbf{w}$ n'est pas un vecteur) soit sont fausses : $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$ peut parfaitement se produire alors que ni $\mathbf{u}$ ni $\mathbf{v}$ ne sont nuls, et en fait :

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

On note $\mathbf{u}.\mathbf{u} = \mathbf{u}^2$ (carré scalaire), et on définit la norme du vecteur $\mathbf{u}$ (notée $\|\mathbf{u}\|$) par $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^2}$ (on remarquera l'analogie avec la valeur absolue); si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on aura donc $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; on démontre alors que si $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \alpha$, on a $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \times \|\mathbf{v}\| \times \cos\alpha$, et, appliquant la formule de projection sur un axe $(O, \mathbf{u})$, que si H est le projeté (orthogonal) de M sur cet axe, on a $\mathbf{u}.\overrightarrow{OM} = \overline{OH} \times \|\mathbf{u}\|$.

Bien entendu, et on peut le redémontrer en partant du théorème de Pythagore, la norme correspond à la «longueur» du vecteur, c'est-à-dire que $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$, et donc que

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

On appelle *vecteur unitaire* un vecteur $\mathbf{u}$ tel que $\|\mathbf{u}\| = 1$; on peut remarquer que quel que soit $\mathbf{v}$ non nul, $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ et $-\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ sont unitaires (et ce sont les deux seuls vecteurs unitaires colinéaires à $\mathbf{v}$).

À partir de ces formules, on voit qu'il est possible de calculer l'angle de deux vecteurs dont on connaît les coordonnées (puisque $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}$), si du moins on peut retrouver α connaissant $\cos\alpha$, ce qui est facile en théorie grâce à la fonction $\arccos$ que nous verrons au chapitre 5… et en pratique grâce aux calculettes, tant qu'on ne se préoccupe pas de questions de signes, puisque $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Cette dernière difficulté ne sera levée qu'au prochain chapitre; en pratique (et sans aucune justification pour le moment), il nous suffira de retenir que si $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \alpha$, et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, α est du signe de $xy' - yx'$ (le déterminant de $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, que nous apprendrons à noter (au chapitre 20) $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$; certains auront peut-être aussi reconnu là un certain produit vectoriel…).

Concluons ce paragraphe par un exemple élégant de démonstration géométrique utilisant le produit scalaire (mais bien d'autres méthodes sont possibles) : soit $[AB]$ le diamètre d'un cercle de centre O (milieu de $[AB]$, donc) et M un point du cercle. On a $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$, donc (posant $\overrightarrow{MO} = -\overrightarrow{OM} = -\mathbf{u}$ et

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{v}$), $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}).(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2 = OB^2 - OM^2 = 0$ (en utilisant la distributivité du produit scalaire). On en déduit donc que le triangle AMB est rectangle en M («les triangles incrits dans des demi-cercles sont rectangles»), propriété que nous utiliserons à plusieurs reprises.

4 Équations de droites et de cercles.

4.1 Vecteurs directeurs, équations cartésiennes des droites.

On appelle *vecteur directeur* d'une droite Δ tout vecteur $\overrightarrow{d}$ non nul tel que $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AB}$, où A et B sont des points de Δ. Dans le plan, soit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ un vecteur directeur d'une droite passant par $A\left|\begin{matrix} x_A \\ y_A \end{matrix}\right.$. Si $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ est un point quelconque de cette droite, c'est donc que $\overrightarrow{AM} = k\mathbf{u}$; le calcul montre alors que $-dx + cy = -dx_A + dy_A$. Une analyse plus précise permet d'en déduire que toute droite Δ du plan possède une équation cartésienne de la forme $ax + by = c$, avec a et b non tous deux nuls (et que les autres équations cartésiennes de ce type sont $kax + kby = kc$), qu'alors le vecteur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur (et les autres vecteurs directeurs de Δ lui sont évidemment proportionnels, en particulier les utiles vecteurs directeurs unitaires $\mathbf{u} = \overrightarrow{d}/\|\overrightarrow{d}\| = \begin{pmatrix} -b/\sqrt{a^2+b^2} \\ a/\sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ et $-\mathbf{u}$).

Remarquant que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -ab + ab = 0$, on voit que le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{d}$, et donc à Δ; $\overrightarrow{n}$ s'appelle un *vecteur normal* de Δ (et les autres vecteurs normaux sont donc de la forme $k\,\overrightarrow{n}$, avec k non nul).

En particulier, si on choisit de mettre l'équation de Δ sous la forme «normalisée» $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, le nouveau vecteur normal $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} a/\sqrt{a^2+b^2} \\ b/\sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ est unitaire, et on voit aisément que si $\alpha = (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{n_0}})$, on a $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, et donc qu'une équation de Δ peut s'écrit sous la forme $(\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y = C$.

La droite d'équation $\sin\alpha x - \cos\alpha y = 0$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_0}$; elle est donc orthogonale à Δ, et son intersection avec Δ, P, est le projeté orthogonal de O sur Δ. Résolvant le système $\begin{cases} (\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y = C \\ \sin\alpha x - \cos\alpha y = 0 \end{cases}$, on en déduit que $P = \left|\begin{matrix} C\cos\alpha \\ C\sin\alpha \end{matrix}\right.$, et on voit que $OP = |C|$; revenant aux équations initiales, on obtient finalement que la distance de O à la droite Δ d'équation $ax + by = c$ (notée $d(O,\Delta)$) est $d(O,\Delta) = |c|/\sqrt{a^2+b^2}$.

On rencontre souvent des équations de droites de la forme $y = ax + b$, dans le cadre d'études de fonctions ($x \mapsto ax + b$ est une *fonction affine*, et son graphe est la droite ayant l'équation $y = ax + b$). Les résultats précédents montrent qu'un vecteur directeur d'une telle droite Δ est $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, et que si $\alpha = (\widehat{Ox, \Delta})$, a, le *coefficient directeur* (ou pente) de Δ, vérifie $a = \tan\alpha$.

4.2 Équations paramétriques et cartésiennes des cercles.

Si $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ appartient au cercle de centre $C\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ et de rayon R, c'est que $CM = R$, et donc que $\|\overrightarrow{CM}\| = R$, ou encore que $\overrightarrow{CM}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$; cette dernière relation est donc une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}(C, R)$; en particulier, le cercle trigonométrique (ou cercle unité) a donc pour équation $x^2 + y^2 = 1$. On voit de même aisément que la sphère de centre $C\left|\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right.$ et de rayon R a pour équation cartésienne $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Réciproquement, soit une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+ax+by+c = 0$. L'utilisation de la méthode vue au chapitre précédent pour obtenir la forme canonique des trinômes permet de la réécrire $(x+a/2)^2+(y+b/2)^2 = k$ (avec $k = -c+(a^2+b^2)/4$), ce qui montre qu'il s'agit de l'équation d'un cercle (de centre $C(-a/2, -b/2)$ et de rayon $\sqrt{k}$) si $k > 0$ (et l'ensemble correspondant est vide si $k < 0$, et réduit au point C si $k = 0$).

Représenter un cercle sous forme paramétrique n'a pas de solution aussi naturelle que pour les droites. On retiendra la représentation trigonométrique standard du cercle $\mathcal{C}(C, R)$ étudié ci-dessus : $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}$, mais on verra aussi au prochain chapitre, par exemple, une représentation inattendue du cercle unité (ou presque : il en manque un point) : $\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$.

4.3 Application : détermination des «formules» d'une symétrie.

Cherchons, par exemple, à déterminer les coordonnées du point M', symétrique de $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ par rapport à la droite Δ d'équation $Y = 2X + 1$. Posant $M' = \left|\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right.$, on sait que cela revient à dire que le milieu de $[MM']$, $P\left|\begin{matrix}(x+x')/2\\(y+y')/2\end{matrix}\right.$ doit appartenir à Δ, et que le vecteur $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$ doit être orthogonal à Δ. On est donc amené à résoudre le système de deux équations (ayant pour inconnues x' et y')

$$\begin{cases} \dfrac{y+y'}{2} = x + x' + 1 & (P \text{ appartient à } \Delta) \\ x' - x + 2(y'-y) = 0 & ((MM') \perp \Delta, \text{ donc } \overrightarrow{MM'}.\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0) \end{cases},$$

dont la résolution est laissée au lecteur (on doit obtenir $x' = (-3x + 4y - 4)/5$ et $y' = (4x + 3y + 2)/5$).

Exercices

1 Trigonométrie.

1 ($\star$) Soit un triangle isocèle ABC ($AB = AC$) de hauteurs $BH = CH' = 1$, et de base $BC = 2$. Déterminer la longueur AB

2 ($\star\star$) On suppose la terre sphérique, de rayon $R = 6400$km. Déterminer la distance de l'horizon, vu du haut de la tour Eiffel (hauteur 300 m) et l'angle avec l'horizontale de la «ligne de visée» de l'horizon

3 ($\star\star$) Déterminer le côté d'un polygone régulier (à n côtés) inscrit dans un cercle de rayon 1 ; vérifier en particulier qu'on retrouve bien les valeurs remarquables des sinus pour $n \in \{3, 4, 6\}$.

4 ($\star\star\star$) Généralisant l'exercice précédent, soit OAM un triangle inscrit dans le cercle unité, avec $A = (1, 0)$ et $(\widehat{OA, OM}) = 2\alpha$. Calculer AM, puis, par deux méthodes différentes, l'aire du triangle OAM. En déduire que $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ (on pensera à discuter selon α).

2 Produit scalaire.

5 ($\star$) Calquant la démonstration du cours sur les triangles rectangles inscrits dans les demi-cercles, montrer que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

6 ($\star\star\star$) Soit 4 points quelconques A, B, C et D. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$. Prenant pour D l'intersection de deux des hauteurs du triangle ABC, en déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

7 ($\star\star$) Soit $A\left|\begin{matrix}13\\21\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}21\\34\end{matrix}\right.$. Calculer (à la calculatrice) l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$. Pourquoi ne peut-on pas se servir d'une figure pour trouver son signe ? Comment le déterminer si on ne connait pas le «truc» du produit vectoriel ?

3 Équations cartésiennes.

8 ($\star$) Soit Δ la droite passant par $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$, et orthogonale au vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$; Si $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ est un point quelconque de Δ, monter qu'en écrivant que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$, on retrouve une équation cartésienne de Δ. Que vaut l'angle $\alpha = (\widehat{(Ox), \Delta})$?

9 ($\star\star$) Soit Δ la droite d'équation $x + 2y = 3$, A le point de Δ de coordonnées $(1, 1)$. Déterminer une équation cartésienne de Δ', la perpendiculaire à Δ en A ; calculer

$d_1 = d(O, \Delta)$ et $d_2 = d(O, \Delta')$. Vérifier que $d_1^2 + d_2^2 = OA^2$; ce résultat était-il prévisible géométriquement ?

T 3 Montrer analytiquement que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

10 ($\star\star\star$) Soit A et B deux points fixés du plan. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA = 2MB$. Comment ce résultat se généralise-t-il dans l'espace ?

3. RAPPELS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Plan