ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

(INTERLUDE)

Les résultats de ce chapitre sont seulement donnés en vue des applications à la physique, et comme exemple (non rigoureux) de l'utilité de l'exponentielle complexe. Des définitions plus rigoureuses et des démonstrations plus complètes seront données au chapitre 14.

1 Équations différentielles.

Une équation différentielle est une relation entre les valeurs d'une fonction et celles de ses dérivées successives (telle par exemple que $[(f''(x))^2 + f(x) = \cos x]$) ; les solutions sont les fonctions vérifiant (en tout point x) la relation donnée.

Pour simplifier l'écriture, on note la fonction inconnue par la lettre y ; l'équation donnée plus haut s'écrit donc $[y''^2 + y = \cos x]$.

Nous ne nous intéressons ici qu'à des équations linéaires, c'est-à-dire où n'interviennent pas de puissances des dérivées, de produits, etc. (et même à des équations linéaires à coefficients constants), telles que $[3y'' - 2y' + y = \sin x]$ par exemple ; on dit que $\sin x$ est le second membre, et que l'équation est du second ordre, parce que n'interviennent que les dérivées première et seconde.

Le cas des équations du premier ordre, sans second membre, est facile à résoudre ; en effet, $y' - ay = 0$ équivaut à $y'/y = a$; et comme y'/y est la dérivée de $\ln|y|$, on obtient $\ln|y| = ax + C^{te}$, d'où on tire $y = Ke^{ax}$ (où K est une constante arbitraire)

Plus généralement, les équations de la forme $a(x)y' + b(x)y = 0$ se résolvent si on connaît une primitive de $-b/a$, c'est-à-dire une fonction F telle que $F'(x) = -b(x)/a(x)$; on a alors $y(x) = Ke^{F(x)}$ (au moins en pratique; certaines difficultés théoriques seront soulevées au chapitre 14)

2 La fonction $x \mapsto e^{kx}$ quand k est complexe.

L'apparition d'exponentielles dans la solution précédente, et les formules d'Euler, ont amené celui-ci à envisager d'introduire des fonctions à valeurs complexes dans ce genre d'équation. Mais pour cela, il faut savoir dériver ces fonctions !

Un calcul direct (il sera fait en classe) montre que la fonction $e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ a pour dérivée (en généralisant un peu les règles usuelles) : $(a + ib)e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$, en d'autres termes la fonction (e^{kx}) a pour «dérivée» ke^{kx}, même si k est complexe. La méthode qui suit utilise cette idée; l'analyse soignée qui sera faite au chapitre 14 montre qu'en réalité, on utilise cette notation pour «deviner» rapidement des solutions de l'équation, mais que l'utilisation des complexes n'est pas vraiment nécessaire dans la résolution...

3 Équations du second ordre sans second membre.

Par analogie avec le résultat de **1**, on va d'abord chercher les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ qui sont de la forme $y(x) = e^{kx}$. Un calcul d'identification montre que k doit vérifier l' «équation caractéristique» : $ak^2 + bk + c = 0$.

3.1 Cas réel.

Si le discriminant de cette équation (avec k inconnu) est positif, on a donc deux «solutions particulières» (non proportionnelles) $e^{k'x}$ et $e^{k''x}$ (où k' et k'' sont donnés par les formules habituelles) ; un théorème dû à Cauchy affirme alors que toutes les solutions de l'équation différentielle sont «combinaison linéaire» des deux premières :

$$y(x) = Ae^{k'x} + Be^{k''x} \text{ (où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes arbitraires)}$$

3.2 Cas complexe.

Si le discriminant est négatif, on utilise l'exponentielle complexe : en posant $k_1 = K + i\omega$ (avec $K = -b/2a$ et $\omega^2 = (4ac-b^2)/4a^2$), on «devine» des solutions de la forme $e^{Kx}(\cos\omega x)$ et $e^{Kx}(\sin\omega x)$; la théorie de Cauchy donne comme solution générale :

$$y(x) = e^{Kx}(A\cos\omega x + B\sin\omega x),$$

que les méthodes de linéarisation du chapitre 4 (paragraphe **7. 5**) nous ont appris à mettre sous la forme $y(x) = Ce^{Kx}\cos(\omega x + \varphi)$.

Enfin, quand le discriminant est nul, e^{Kx} est bien encore solution, mais il en faut une seconde (non proportionnelle), on vérifiera que xe^{Kx} convient (il faut bien reconnaître que ce choix est difficile à justifier...), d'où la solution générale :

$$y(x) = (Ax + B)e^{Kx}.$$

D'un point de vue pratique, on recherche en général une solution précise de l'équation, en d'autres termes une fonction vérifiant, outre l'équation différentielle, certaines conditions supplémentaires. Ainsi, en mécanique, une équation différentielle donnera l'ensemble de tous les mouvements possibles soumis à certaines forces, mais le mouvement réel dépendra des «conditions initiales» (vitesse initiale par exemple) imposées au mobile. Cela se traduit, comme on le verra en Physique, par la donnée des valeurs $y(0)$ (la position initiale) et $y'(0)$ (la vitesse initiale). Déterminer alors le mouvement effectif reviendra donc à calculer les constantes A et B pour que la fonction y vérifie ces conditions.

3.3 Graphes des solutions.

Les fonctions que nous venons d'obtenir ont des graphes très caractéristiques, et leur étude peut se faire aisément à l'aide des méthodes du chapitre précédent (et aussi, comme on le verra plus tard, par les méthodes «qualitatives» du chapitre 8) ; on remarquera par exemple que la fonction $f : x \mapsto e^{-Kx}\cos\omega x$ «oscille» entre les deux exponentielles e^{-Kx} et $-e^{-Kx}$, qu'elle «touche» pour $x = k\pi/\omega$; sa dérivée vaut $e^{-Kx}(-K\cos\omega x - \omega\sin\omega x)$ que, comme plus haut, on met sous la forme $Ae^{-Kx}\cos(\omega x + \varphi)$ pour déterminer les extremums de f. On dit souvent que $T = 2\pi/\omega$ est la pseudo-période de f. Dans le cas où on fait varier les paramètres (celui représentant la «résistance», ou le «frottement», par exemple) d'une équation différentielle de ce type, on passe souvent de solutions de cette forme (dite *faiblement amortie*) aux solutions rapidement décroissantes sans oscillations vues en **1**, et qu'on dit *fortement amorties*; le cas particulier d'une racine double de l'équation caractéristique s'appelle alors le régime *critique*.

4 Équations avec second membre.

On montrera en classe que si on connait une solution particulière y_0 d'une équation de la forme $ay'' + by' + cy = g(x)$, toutes les autres solutions sont de la forme $y(x) = y_0(x) + Y(x)$, où Y vérifie l'équation (sans second membre) $aY'' + bY' + cY = 0$.

Il reste donc à trouver une solution particulière; on devine en pratique la «forme» de y_0, et on ajuste les coefficients par la méthode d'identification.

Un cas particulier important est celui où le second membre est constant (c'est-à-dire $ay'' + by' + cy = d$); il est évident que $y_0 = d/c$ convient. En pratique (en Électricité), on rencontre aussi des seconds membres du type $d \cos kx$; on cherche alors une solution y_0 de forme «analogue» ($d_0 \cos(kx + \varphi)$), obtenant des formules très classiques qui vous seront rappelées en Physique et en Techno (voir aussi les remarques suivant l'encadré).

On rencontre enfin des seconds membres «constants par intervalles» (fonctions «échelons» et «créneaux»); ils se traitent par la méthode de «raccordement», qu'on verra au chapitre 14.

L'encadré suivant (et qui pourrait constituer un exercice type, mais ce chapitre n'est qu'un interlude...) montre un exemple plus compliqué encore (et sans doute dépassant déjà les besoins des utilisateurs); d'autres exercices seront traités en classe, et des méthodes moins «bricolées» seront vues au chapitre 14 (mais en fait, les indications qui précédent couvrent la plupart des cas qu'on sait résoudre).

Résolution de (E) : $y'' + 2y' + 2y = x + e^x + \cos x$

1) Résolvons d'abord l'équation sans second membre : $Y'' + 2Y' + 2Y = 0$; on doit donc résoudre l'équation caractéristique $(*)$ $k^2 + 2k + 2 = 0$

Attention, cette formulation est un sévère «abus de langage», il faudrait (pour une rédaction soignée) rappeler qu'on a posé $Y = \exp(kx)$, et peut-être même montrer que k vérifie bien $(*)$

On trouve $k = -1 + i$ ou $k = -1 - i$; on en déduit que la solution générale est de la forme $Y = Ae^{-x} \cos(x + \varphi)$

2) On cherche à présent une solution particulière : on devine qu'elle doit être de la forme $Ax + B + Ce^x + D \cos x + E \sin x$ (des règles couvrant les cas usuels seront données en classe). Par identification, on trouve : $2A = 1$ (terme «en x»); $2A + 2B = 0$ (terme constant); $5C = 1$ (terme en e^x); et le système (venant des termes en $\cos x$ et $\sin x$) : $D + 2E = 1$ et $E - 2D = 0$; d'où la solution

$$y_0(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{e^x + \cos x + 2 \sin x}{5}$$

3) Il ne reste plus qu'à conclure : la solution générale de (E) est :

$$y(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{e^x + \cos x + 2 \sin x}{5} + Ae^{-x} \cos(x + \varphi)$$

Les utilisateurs des méthodes que nous venons de voir ont développé des raccourcis et une terminologie adaptée à leurs besoins; et en particulier, certaines des formules que nous venons d'obtenir risquent de rappeler des souvenirs aux élèves ayant fait de l'électronique (ou de l'électrotechnique), mais les termes «exponentiels» doivent leur paraître bizarres ! Pour comprendre ce qui se passe, il faut savoir que dans les équations usuelles des circuits oscillants (les circuits «RLC»), le «second membre» correspond au courant imposé (la tension aux bornes), et la solution $Y(t)$ est toujours de la forme $e^{-kt}(\dots)$, c'est-à-dire qu'elle tend très rapidement vers 0, et qu'il ne reste donc plus en pratique que $y(t) \simeq y_0(t)$, qu'on appelle le régime stationnaire (et auquel correspondent les formules d'impédance complexe qu'on vous a peut-être apprises). Quand à $Y(t)$, c'est le «régime transitoire», oscillations (dont on a vu la forme en **3. 3**) rapides et pouvant être d'amplitude importante, qui se produisent quand on branche le circuit, mais qui disparaissent si vite qu'on peut les négliger

---

Exercices

1 (R) Résoudre $y' + y = 0$ et $y'' + y = 0$

2 ($\star\star$) Résoudre (et discuter) $y'' + ay = 0$

3 ($\star\star$) Résoudre (et discuter) $y'' + 2y' + ay = 0$

4 ($\star$) Résoudre $y'' + y' - 2y = a$

5 ($\star\star$) Résoudre $y'' + 4y' - 5y = x^3 + 2x - 1$

6 ($\star\star\star$) Résoudre $y'' + y = \sin x + \sin 2x$

7 ($\star\star$) Résoudre $2y'' + 3y' - 5y = x^2 + e^{2x} + \sin x$

8 ($\star\star\star$) Résoudre $y'' + y' + y = x^2 \sin x$

9 ($\star\star\star$) Résoudre $y'' + y = x^2 \sin x$

10 ($\star\star\star$) Résoudre $y'' - 2y' + 5y = xe^{-x} \sin x$