5. ANALYSE ÉLÉMENTAIRE ET FONCTIONS USUELLES

1 Étude classique des fonctions usuelles.

1.1 Introduction.

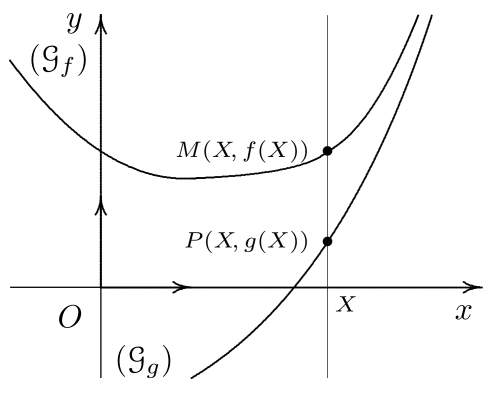
L'analyse est la partie des mathématiques qui étudie les fonctions. La définition générale de cette notion sera faite au chapitre 8 ; nous allons ici rappeler les méthodes usuelles d'étude des fonctions (numériques) définies par des «formules», par exemple la fonction f définie par $x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^2 - 2\cos x}{\ln(\ln x)}$; bien que les complications pratiques d'une étude de ce genre puissent devenir considérables, on ne rencontre pas, le plus souvent, de difficultés (théoriques) telles que les méthodes plus rigoureuses qui seront vues plus tard deviennent nécessaires. L'objectif principal du plan d'étude qui va suivre était le tracé du graphe, du temps où les moyens informatiques n'avaient pas rendu ce travail sans intérêt. Toutefois, si cet objectif utilitaire semble avoir perdu sa raison d'être, les questions qu'on doit se poser pour «étudier» une fonction restent les mêmes : on verra que pour des fonctions «non élémentaires», ce sont encore celles qui permettent d'obtenir des informations que le calcul «brutal» ne donnerait pas.

1.2 Représentation graphique.

La représentation la plus intéressante d'une fonction «classique» est son graphe dans un repère cartésien bien choisi ; on prend toujours des axes orthogonaux, mais il est parfois utile de choisir des unités inégales, et certaines fonctions nécessitent plusieurs repères (d'origines appropriées).

1.2.1 Propriétés «élémentaires».

Par définition, le graphe de f (noté généralement $\mathcal{G}_f$) est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ quand x parcourt le domaine de f ; un grand nombre de propriétés de f ont une interprétation graphique, souvent très visible pour les fonctions usuelles (l'existence d'une asymptote, par exemple, signifie que le graphe, vu de loin (c'est-à-dire avec une échelle assez petite), «ressemble» à une droite). On verra toutefois à partir du chapitre 8 qu'il faut se méfier des résultats ainsi «devinés», dès que la fonction n'est plus aussi simple. Des démonstrations rigoureuses utilisent la «mise en équation», telle que par exemple celle qui donne la position relative de deux courbes par l'étude du signe de $\overline{MP}$, où M et P sont deux points représentatifs ayant même abscisse X ; on voit qu'il suffit d'étudier le signe de $g(X) - f(X)$. De même, la valeur de $|g(X) - f(X)|$ correspond à la distance MP, ce qui permet d'interpréter sa limite (nulle) comme le signe d'un rapprochement «asymptotique» des deux graphes.



1.2.2 Antécédents, restrictions et prolongements.

La définition même du graphe implique la possibilité de résoudre «graphiquement» certaines équations : la lecture directe donne la valeur de $f(a)$ (qui s'appelle l'*image* de a par f) en coupant le graphe par la droite d'équation $[X = a]$ (les graphes sont par conséquent soumis à la restriction de n'avoir qu'un point au plus sur chaque «verticale»); réciproquement, la résolution de l'équation $f(x) = b$ (où b est un paramètre) s'appelle la recherche des *antécédents* (éventuels) de b, et s'obtient en coupant le graphe par la droite «horizontale» $[\![Y = b]\!]$. Il est fréquent en pratique, comme on va le voir, qu'on ne s'intéresse à ce problème que pour certaines valeurs de b, ou qu'on ne recherche qu'une partie des antécédents; on est alors amené à restreindre la fonction f à certains intervalles. La notation $g = f\Big|_I^J$ (qui se lit «g est la restriction de f à I et à J»), où I et J sont des intervalles, signifie ainsi que l'on prend comme domaine de définition de g l'intervalle I, et que pour $x \in I$, on pose $g(x) = f(x)$ si $f(x)$ appartient à J; inversement, on dira alors que f est un *prolongement* de g.

1. 2. 3 Bijections, bijections réciproques.

Soit f une fonction,. Dans de nombreux cas (par exemple si f est monotone sur un intervalle), on peut démontrer que pour deux intervalles A et B bien choisis, on a pour chaque b de B un antécédent et un seul dans A; autrement dit, $(\forall b \in B)(\exists! x \in A)(f(x) = b)$. Dans ce cas, on dit que f (ou sa restriction à A) est une *bijection* de A vers B. Soit alors x_b l'unique antécédent de $b \in B$. On peut considérer que $b \mapsto x_b$ définit une nouvelle fonction, allant de B vers A; on l'appelle la *bijection réciproque* de f, et on la note f^{-1}. Autrement dit (pour $x \in A$ et $y \in$B), $x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$. Le graphe de la bijection réciproque de f est (dans un repère orthonormal) le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $[\![Y = X]\!]$). Ces notions vont être illustrées dans les paragraphes suivants (tout particulièrement en **5**), puis précisées et complétées au chapitre 9.

1. 3 Le plan d'étude «général».

Le plan d'étude qui suit doit être compris comme s'appliquant à toute fonction; comme tel, certaines de ses rubriques doivent être sautées (on ne cherche pas la période d'un polynôme; il est inutile de rechercher les branches infinies d'une fonction définie sur $[\![0; 1]\!]$ ...); d'autre part, la mise en application de ce plan sur des exemples sera faite en classe, mais en réalité nous ne pourrons justifier rigoureusement certains des résultats obtenus, tels ceux utilisant les «échelles de comparaison», qu'à la fin du chapitre 11 ! Enfin, il arrive qu'un énoncé ne demande qu'une étude rapide (ou même seulement une étude des variations) d'une certaine fonction, et il suffira alors de traiter les points 1, 4 et 6 du plan; un exemple intéressant en est donné dans l'exercice-type n° 5. Enfin, ce plan avait popur objectif premier de permettre le tracé rapide du graphe; on pourrait penser que les outils de calcul actuels rendent cela inutile, mais on verra en particulier en TD que certaines fonctions pas si complexes (et rentrant dans notre définition), telles que $x \mapsto \ln\ln(-\ln x)$ ou $x \mapsto \sin(10^7 x)$ sont (très) mal représentées par les calculettes.

Plan d'étude

Étapes à suivre

1 Domaine de définition	*(les valeurs de x pour lesquelles la fonction «existe»)*
2 Parité, périodicité	*(d'où l'on tire le «domaine d'étude»)*
3 Continuité	*(elle est automatique pour les fonctions usuelles)*
4 Limites aux bornes	*(celles du domaine d'étude; on peut en profiter pour mentionner les asymptotes qui en résultent)*
5 Existence et calcul de la dérivée	*(par application des «formules»)*
6 Signe de la dérivée et tableau de variation	*(et calcul des extremums)* *(on pensera aussi à rappeler les limites dans le tableau)*
7 Branches infinies	*(voir aussi la fin du chapitre 9)*
8 Points exceptionnels	*(rares pour les fonctions usuelles; voir chapitre 11)*
9 Mise en place et tracé du graphe	*(tracé des extremums et des asymptotes)*

1.4 Formules de base.

La mise en œuvre pratique du plan qui précède nécessite la connaissance de quelques «formules» : d'une part, les formules générales de dérivation des opérations élémentaires, résumées dans l'encadré suivant :

Fonctions	Dérivées
$f, g, h\ldots$	$f', g', h'\ldots$
$f+g$	$f'+g'$
$f-g$	$f'-g'$
$f.g$	$f'g+fg'$
f/g	$(f'g-fg')/g^2$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$
f^n	$nf'f^{n-1}$
** $g\circ f$	$f'.(g'\circ f)$, voir ch. 9 **

et les dérivées des fonctions classiques qui seront rappelées plus bas :
$(x^n)' = nx^{n-1}$; $(\ln x)' = 1/x$; $(\sin x)' = \cos x$; etc...

D'autre part, les limites usuelles : «division par 0» ; limites à l'infini. On retiendra :

— que la limite d'un quotient de la forme $N(x)/D(x)$, où $D(x)$ tend vers 0 et $N(x)$ ne tend pas vers 0, est toujours infinie; il suffit de déterminer le signe du quotient.

— que la forme «0/0» peut poser des problèmes difficiles (on les verra aux chapitres 9 et 10)

— qu'à l'infini, il suffit en général de ne garder que les termes «les plus grands», ce qui se montre en factorisant ces termes (et en vérifiant que les limites «négligées» sont bien nulles)

— et les limites des fonctions «classiques» des sections suivantes

2 Logarithme, exponentielle et fonctions analogues.

2.1 Définitions de $\ln x, e^x, a^x, \log_a(x)$.

On sait (et on en reverra une justification rigoureuse lors du cours sur l'intégration) qu'il existe une primitive unique de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui soit définie sur $]0, +\infty[$, et qui soit nulle pour 1 (en d'autres termes, telle que $f'(x) = 1/x$, et que $f(1) = 0$) On la note $\ln x$, et on démontre les formules suivantes (pour tous a et $b > 0$) :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \ ; \ \ln(a/b) = \ln a - \ln b$$
$$\ln(a^b) = b \ln a \quad \text{(voir plus bas)}$$
$$\ln(1/a) = -\ln a \ ; \ \ln(\sqrt{a}) = 1/2 \ln a$$

Il existe un réel unique A tel que $\ln(A) = 1$; on le note e; on a

$e = 2,718281828459\ldots$ (à 10^{-12} près; on montrera en Spé que e est irrationnel).

La fonction ln est croissante stricte (puisque sa dérivée $1/x$ est positive); on en déduit l'existence d'une fonction réciproque $(\ln)^{-1}$ que l'on note $x \mapsto \exp(x)$, ou plus fréquemment $x \mapsto e^x$; et on démontre (ce qui justifie la notation) que e^x vérifie toutes les formules données plus bas, si x est rationnel. On généralise de même la notation a^x au cas où x est réel, et l'utilisation de ln aboutit à la formule «définitionnelle» :

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} e^{x \ln a} \qquad (\text{ avec } a > 0)$$

Les formules suivantes (qui généralisent les formules classiques dans $\mathbf{Z}$) s'en déduisent :

$$a^{x+y} = a^x.a^y \ ; \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \ ; \ a^0 = 1 \ ; \ a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$$
$$(ab)^x = a^x b^x \ ; \ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$
$$(a^b)^x = a^{bx}$$

(et on ne peut pas obtenir d'autres relations simples, en particulier pour $(a+b)^x$)

On montre (directement) l'existence d'une bijection réciproque de a^x, notée $\log_a(x)$, et on a donc (d'après les formules précédentes)

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a};$$

on vérifie que $\log_a$ «a les mêmes propriétés» que ln; et on a les formules de réciprocité :

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \qquad (x > 0) \\ \ln e^x &= x \qquad (\text{toujours vrai}) \\ a^{\log_a x} &= x \qquad (x > 0) \\ \log_a(a^x) &= x \qquad (\text{toujours vrai}) \end{aligned}$$

Dans les applications pratiques, on a longtemps utilisé $\log_{10}(x)$, qu'on notait simplement $\log(x)$ (et la fonction ln se notait alors $\mathrm{Log}(x)$); ainsi, on définit en Chimie le pH par la formule $\mathrm{pH} = \log_{10}(1/[\mathrm{H}^+]) = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$.

2.2 Dérivées, graphes, limites usuelles, échelles de comparaison.

On refera l'étude (au sens de **1.2**) en exercice; il faut surtout retenir :

— Les dérivées :

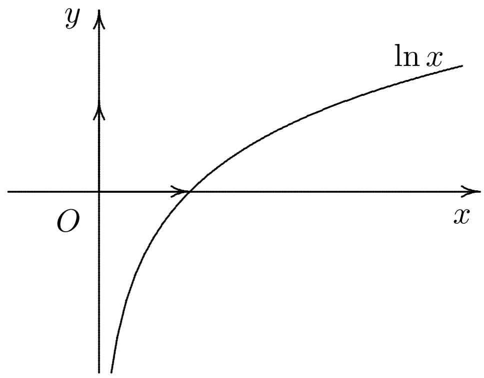
$$(\ln x)' = 1/x \ ; \ (e^x)' = e^x \ ; \ (a^x)' = (\ln a).a^x$$

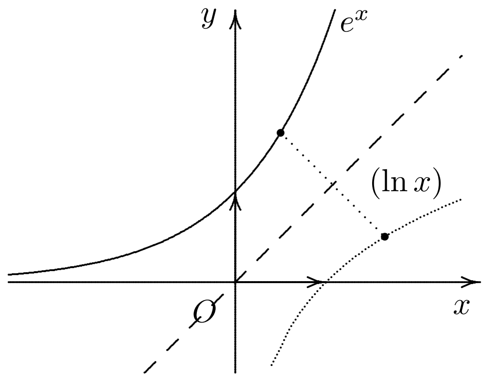
— Les limites usuelles :

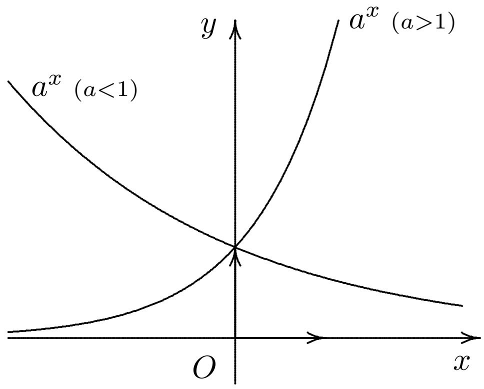
$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

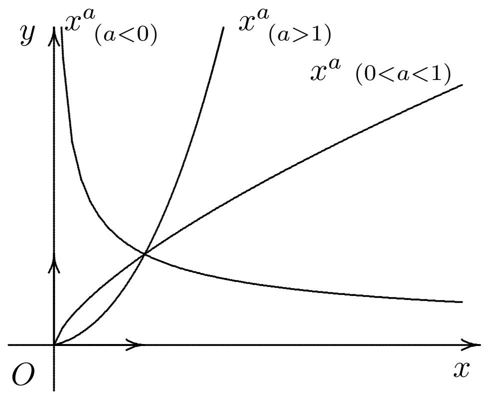
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

— Les graphes : ils seront établis en classe









— Les *échelles de comparaison* usuelles : il s'agit de la «taille» relative des fonctions usuelles «quand x tend vers une des bornes du domaine»; cette question sera approfondie au chapitre 11.

On retiendra à ce sujet :

— Les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/x^a = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x/x^a = \lim_{x\to+\infty} a^x/x = +\infty \qquad (a > 0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0 \qquad (a > 0); \lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$$

— Les classements «intuitifs» (pour $a > 0$) :

$$\ln x \underset{+\infty}{\ll} x^a \underset{+\infty}{\ll} e^x \qquad ; \qquad \ln x \underset{0^+}{\ll} 1/x^a \qquad ; \qquad e^x \underset{-\infty}{\ll} 1/|x|^a$$

La signification exacte et le mode d'emploi du signe $\underset{a}{\ll}$ seront précisés au chapitre 11.

2.3 Trigonométrie hyperbolique.

2.3.1 Définition de $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$.

Par analogie avec les formules d'Euler, on définit arbitrairement

$$\operatorname{ch} x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sh} x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \text{et } \operatorname{th} x \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Ces fonctions (que les calculettes notent cosh, sinh et tanh) s'appellent respectivement cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique.

On vérifie aisément que $(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1$, et donc que le point de coordonnées $(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ appartient à la courbe d'équation $[X^2 - Y^2 = 1]$; comme (en repère orthonormal) celle-ci est une hyperbole (équilatère), l'analogie avec les fonctions «circulaires» (les fonctions trigonométriques usuelles) justifie le nom de trigonométrie hyperbolique.

Attention : x ne représente aucun «angle» !

2.3.2 Étude analytique.

L'étude de ces fonctions sera faite en classe; à retenir :

$$\text{ch est paire, sh et th sont impaires}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = +1$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \ , \ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \ , \ (\operatorname{th} x)' = 1 - (\operatorname{th} x)^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Attention : on remarquera (mais on pensera aussi à s'en méfier) que les analogies avec cos, sin et tan sont complètes **au signe près**

3 Fonctions trigonométriques.

3.1 Périodicité et symétries des graphes des fonctions circulaires.

Les fonctions circulaires ont pour période 2π, $\tan x$ a aussi pour période π; une étude soignée des variations montre que ce sont les plus petites périodes. On en déduit aisément par changement de variable la période d'une fonction telle que $\tan(ax + b)$ (égale à π/a); mais d'autres combinaisons de fonctions circulaires ne permettent pas en général de faire mieux que «deviner» une période égale au PPCM des périodes des constituants; d'éventuelles simplifications doivent être prouvées, la preuve rigoureuse de ce que l'on a déterminé la plus petite période passant généralement par l'étude des variations. Le domaine d'étude des fonctions s'en déduit, en n'oubliant pas d'exploiter les symétries dues à la parité.

D'autres symétries des graphes se déduisent des identités classiques, ainsi, la relation $\cos(\pi + x) = -\cos x$ montre la symétrie du graphe de cos par rapport au point $(\pi/2; 0)$; et la relation $\cos(x - \pi/2) = \sin x$ montre l'identité par translation des graphes de sin et cos; on reverra ces résultats au chapitre 8.

3.2 Dérivées, comportement.

Si on part de la définition géométrique, il est difficile d'obtenir rigoureusement la valeur de la dérivée de $\sin x$ (ce sera fait au chapitre 10, mais on peut remarquer que la dérivée de l'exponentielle complexe vue dans l'interlude précédent en est une généralisation) ; il convient de retenir les dérivées usuelles :

$$\begin{aligned} (\sin(ax+b))' &= a\cos(ax+b) \\ (\cos(ax+b))' &= -a\sin(ax+b) \\ \text{(d'où on tire} \quad (\tan(ax+b))' &= \frac{a}{\cos^2(ax+b)}) \end{aligned}$$

et on remarquera aussi la propriété de «déphasage»

$$(\sin x)' = \sin(x+\pi/2); (\cos x)' = \cos(x+\pi/2)$$

qui se généralise aux dérivées $n^{\text{èmes}}$: $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\pi/2)$.

Le comportement de sin, cos et tan s'en déduit aisément (l'interprétation géométrique sur le cercle unité permet d'ailleurs de le retrouver) ; on obtient :

— sin croissante sur $[-\pi/2;\pi/2]$

— cos décroissante sur $[0;\pi]$

— tan croissante sur $]-\pi/2;\pi/2[$

Les autres variations s'en déduisent par symétrie et périodicité; les graphes correspondants sont bien connus, et seront réétablis en classe. On verra enfin comment étudier des fonctions (simples) obtenues par combinaison de fonctions circulaires; les techniques de transformations vues au chapitre 4 s'avèrent souvent utiles.

4 Fonctions trigonométriques inverses.

4.1 Définition de Arccos, Arcsin et Arctg.

On vient de voir que cos est continue décroissante sur $[0,\pi]$, on montrera au chapitre 9 que cela entraîne que c'est une bijection de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$; la bijection réciproque est donc définie sur $[-1,1]$; c'est une fonction décroissante, dont le graphe est symétrique de celui de cos (par rapport à la première bissectrice $[Y=X]$); on note cette fonction Arccos, ou Acos (et sur les calculettes, elle est notée $\cos^{-1}$) (On lit «arc cosinus (de) x»). Arccos (x) est donc l'angle (ou plus rigoureusement sa mesure en radians) compris entre 0 et π, et dont le cosinus vaut x; ainsi, on a (si $-1 \leq x \leq 1$) $\cos(\operatorname{Arc}\cos x) = x$ (hors de l'intervalle $[-1,1]$, la formule n'est pas définie). L'autre formule de «réciprocité» : $\operatorname{Arc}\cos(\cos x) = x$ n'est valable que si $0 \leq x \leq \pi$; l'étude précise de la fonction $\operatorname{Arc}\cos(\cos x)$ et d'autres fonctions analogues sera faite en exercice; elle repose sur les méthodes de séparation en intervalles qu'on verra plus loin.

De même, sin est continue croissante de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1,1]$; la bijection réciproque se note Arcsin (ou Asin, ou $\sin^{-1}$); elle est croissante, d'image l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, et on a (formules de «réciprocité») $\sin(\operatorname{Arc}\sin x) = x$, si $-1 \leq x \leq 1$; et $\operatorname{Arc}\sin(\sin x) = x$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Enfin, tan est continue croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbf{R}$, la bijection réciproque, notée Arc tg (ou Atan, ou $\tan^{-1}$), est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier; elle est impaire, croissante et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}$.

On verra aux chapitres 7 et 9 les justifications de ces différents résultats (et leurs généralisations à d'autres types de fonctions). Il est important de remarquer que les trois intervalles choisis sont, dans une certaine mesure, arbitraires (même si d'autres choix paraîtraient artificiels); il en résulte que ces intervalles font partie constitutive de la définition de Acos, Asin et Arc tg (en d'autres termes, on aurait pu inventer une autre fonction Asin, par exemple, de même domaine de définition $[-1, 1]$, mais dont les **valeurs** seraient $\geq \pi/2$), et qu'il convient par conséquent de les savoir «par cœur».

4.2 Dérivées, variations et graphes.

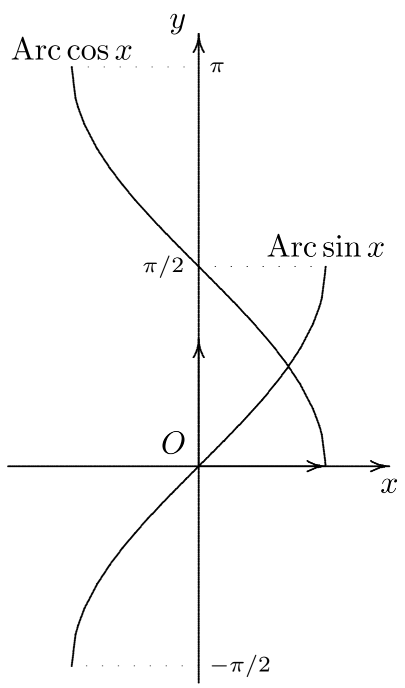
On montrera («intuitivement», en classe, puis rigoureusement au chapitre 10) que ces fonctions ont les dérivées suivantes :

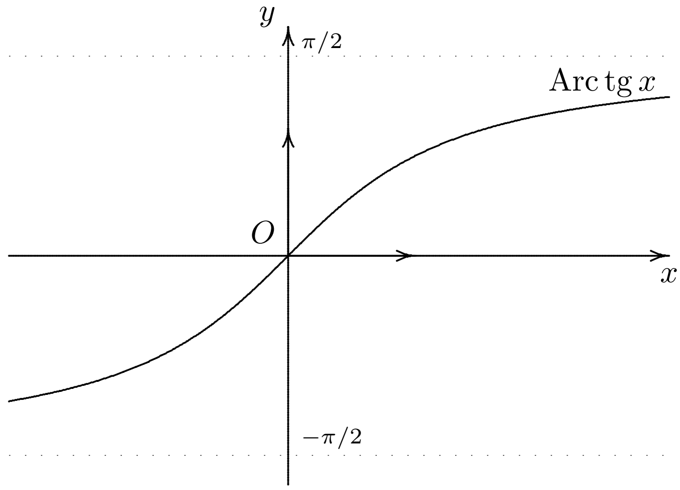
$$(\operatorname{Arc\,cos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad (\operatorname{Arc\,sin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad (\operatorname{Arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Cette dernière dérivée donne donc une primitive de $1/1+x^2$; comme pour la fonction ln (primitive de $1/x$), il n'est pas possible d'obtenir une formule n'utilisant que des fonctions déjà connues, ou d'écrire Arctg comme combinaison d'autres fonctions.

Ces trois dérivées étant de signe constant, on voit que les trois fonctions sont monotones; c'était d'ailleurs évident d'après leur définition.

Les graphes sont obtenus par symétrie (autour de la première bissectrice $[Y = X]$) de ceux des fonctions circulaires, ou plus précisément de leur restriction aux intervalles de définition; on a





4.3 Techniques de manipulations «algébriques» : quelques formules.

Toutes les formules trigonométriques peuvent être «inversées» : la méthode générale consiste à exprimer les angles intervenant dans la relation sous forme de fonctions réciproques. Ainsi, de $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, on tirera $\operatorname{Arc}\cos x + \operatorname{Arc}\sin x = \frac{\pi}{2}$, mais le plus souvent, ces formules ne sont valables que dans certains intervalles...

On trouvera dans la fiche d'exercice-type n° 7, ainsi que dans les exercices 10 à 13, des méthodes pour obtenir ces formules et pour les démontrer; mais la connaissance des formules elles-mêmes est hors-programme.

Exercices

1 Études de fonctions et applications.

1 ($\star\star$) Étudier la fonction

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+x}$$

(on sera amené à étudier (brièvement) les variations de la fonction auxiliaire $g(x) = 2x^5+4x^3-x^2+1$, qui nécessitera elle-même l'étude de celles de $h(x) = 5x^3+6x-1$)

2 ($\star\star$) Étudier la fonction $x \mapsto f(x) = x^x$, puis la fonction $x \mapsto g(x) = x^{f(x)}$.

3 ($\star\star$) Étudier la fonction $x \mapsto f(x) = \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3}$.

> **T 6** Montrer que pour tout $x > 0$, on a l'encadrement $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ (on étudiera les variations des fonctions $f : x \mapsto f(x) = x - \sin x$ et $g : x \mapsto g(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$).

4 ($\star\star\star$) Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$; en déduire le nombre de solutions de l'équation $a^x = x^a$ (discuter suivant a). Montrer qu'il n'y a qu'un couple d'entiers distincts m et n tels que $m^n = n^m$.

5 ($\star\star$) Déterminer les formules de duplication pour $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{th} x$.

2 Fonctions trigonométriques et réciproques.

5 ($\star$) Quelle est la période de $\cos(x/5) + \sin(x/3)$?

6 ($\star\star\star$) La fonction $\cos x^2$ est-elle périodique ? Et la fonction $\cos x + \cos x\sqrt{2}$? (Justifiez rigoureusement vos réponses...)

T 7 Montrer que pour tout t non nul, $\operatorname{Arc\,tg} t + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}.\operatorname{signe}(t)$

a) à l'aide d'une étude de fonction,

b) directement, en utilisant la relation entre $\tan\alpha$ et $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

7 (⋆⋆) Montrer que $\operatorname{Arc\,cos}(2x^2 - 1) = 2\operatorname{Arc\,cos} x$ si x appartient à un certain intervalle, que l'on précisera. Que se passe-t-il en dehors de cet intervalle ?

8 (⋆⋆) Montrer que $\operatorname{Arc\,tg} 2 + \operatorname{Arc\,tg} 3 = n\pi/4$, où n est un entier que l'on précisera.

9 (⋆⋆⋆) Démontrer la «formule de Machin» : $\pi/4 = 4\operatorname{Arc\,tg}(1/5) - \operatorname{Arc\,tg}(1/n)$, où n est un entier que l'on précisera.

10 (⋆⋆⋆) Construire sur le modèle de l'exercice **10** des formules de transformation analogues pour $2\operatorname{Arc\,sin} x$, $3\operatorname{Arc\,cos} x$ et $3\operatorname{Arc\,sin} x$. Déterminer dans chaque cas les intervalles de validité.

5. ANALYSE ÉLÉMENTAIRE ET FONCTIONS USUELLES

Plan