7. LE LANGAGE DES FONCTIONS

1 Définitions générales.

1.1 La notion de fonction.

Partant de la notion de procédé de calcul (donc de «formule»), on a été amené (au cours du $18^{\text{ème}}$ siècle) à s'intéresser à des fonctions de plus en plus générales, déterminées par des calculs «théoriques» (primitives), ou comme solutions d'équations fonctionnelles (équations différentielles, etc...), ou encore aux fonctions «expérimentales» issues de la physique ou de la géométrie, jusqu'à aboutir à la notion moderne : une fonction est une correspondance (une mise en relation) entre un ensemble d'objets et un autre, tel qu'à tout élément du premier ensemble correspond au plus un élément du second; le procédé exact qui assure cette correspondance n'a pas d'importance, pourvu qu'il respecte cette règle d' «unicité».

Ainsi, on dira que f est une fonction de A vers B si à tout élément x de A, f fait correspondre au plus un élément de B, noté alors $f(x)$, et qu'on appelle l'*image* de x (par f); on symbolise tout ceci par la notation $f : A \to B$; $x \mapsto f(x)$, ou plus précisément :

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

Il faut bien distinguer, dans ce genre de notations abstraites, l'objet $f(x)$ (un élément de B) et l'objet f (un procédé de calcul); la différence prend tout son sens si f est inconnue! Cela ne pose guère de problème si f a déjà un nom (cos ou Arctg par exemple), mais sinon l'on sera amené à une notation telle que «f est la fonction (de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$) $[x \mapsto x^2 + \cos x]$», et l'on fera très attention à ne pas se contenter de l'écriture «$f(x) = x^2 + \cos x$».

On fera enfin attention à ce que dans ces écritures, x est une variable «muette», c'est-à-dire que $x \mapsto f(x)$ et $t \mapsto f(t)$ représentent en fait la même fonction; c'est une source de confusion facile quand on recherche la fonction réciproque de f, par exemple.

1.2 Ensembles et fonctions.

Avec ces définitions générales, on est amené à utiliser des notations «ensemblistes»; ainsi, la «définition» de «f est une fonction de A vers B» est :

$$(\forall x \in A)(\text{"}f \text{ associe } y_1 \text{ et } y_2 \text{ à } x\text{"} \Rightarrow y_1 = y_2 \in B).$$

On voit d'ailleurs que cette définition manque encore de rigueur (à cause du verbe «français» associer); une solution correcte est de définir des objets plus généraux que les fonctions : les correspondances (ou fonctions multivoques), définies par l'ensemble des couples de $A \times B$ liés par f (ce que l'on appelle le graphe de f); on obtient alors une définition «parfaitement rigoureuse», telle que

$$(\forall x \in A)((x, y_1) \in f \text{ et } (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2 \in B)$$

A s'appelle l'*ensemble de départ* (ou source), et B l'*ensemble d'arrivée* (ou but), et, bien que la nuance puisse paraître subtile, on voit que par exemple la fonction $[x \mapsto x^2]$

n'est pas la même suivant qu'on la considère comme allant de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$.

En fait, on peut même considérer que pour toute fonction f, quatre ensembles interviennent : les ensembles A et B de départ et d'arrivée, et les «véritables» ensembles concernés : celui des x pour lesquels $f(x)$ existe (l'*ensemble de définition* de f, ou *domaine*, noté D_f), et celui des valeurs que f prend effectivement, appelé *image* de f (et noté $\mathrm{Im}(f)$) ; on a, bien sûr, $\mathrm{D}_f \subset A$ et $\mathrm{Im}(f) \subset B$.

Plus généralement, on peut dire que f fait correspondre à toute partie A' de A un sous-ensemble de B, noté $f(A')$ (on a donc $f(A') = \{y \in B | (\exists x \in A)(f(x) = y)\}$) ; ce qui permet d'écrire $f(A) = \mathrm{Im}(f)$ par exemple.

Toutefois, ce genre d'écriture peut créer des confusions si f «opère» déjà sur des ensembles (par exemple la fonction '$\mathcal{A}: S \mapsto \mathrm{Aire}(S)$' qui «calcule» la surface d'une partie S du plan...) ; il faudra alors utiliser une autre notation, telle que $f{<}A'{>}$.

Si f et g ont «les mêmes valeurs», c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, $f(x) = g(x)$, mais que $\mathrm{D}_f = A$ est inclus (strictement) dans $\mathrm{D}_g = B$, on dit que g est un *prolongement* de f à B (il peut y en avoir d'autres) et que f est **la** *restriction* de g à A, et on note $f = g|_A$.

On est parfois amené à restreindre de même l'ensemble d'arrivée, notant ainsi (si g est une fonction de A vers B, et si $C \subset B$) $g|^C$ la fonction de A vers C qui (pour tout x de A) vaut $g(x)$ si $g(x) \in C$, et qui n'est pas définie sinon.

1.3 Représentations.

Si les deux ensembles A et B sont finis, il est possible de représenter f par des diagrammes reliant (par des flèches) les éléments de A à leurs images (dans B) ; mais en général, ce procédé ne peut au mieux donner qu'une très vague idée des propriétés de f.

La représentation la plus classique consiste à montrer l'ensemble des couples de la forme $(x, f(x))$ quand x parcourt A ; c'est un sous-ensemble de l'ensemble $A \times B$ de tous les couples possibles (x, y), qu'on appelle le *graphe* de f (et qu'on note $\mathcal{C}_f$, ou $\Gamma(f)$...). Si $A \times B$ peut être représenté «géométriquement», cela donne une image concrète de f, quoiqu'on verra que seules des fonctions assez simples peuvent être ainsi décrites. Mais les fonctions de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$ ont pour graphe une partie de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, ensemble qui ne peut être représenté dans l'espace (il aurait quatre dimensions) ; dans des cas de ce genre, le graphe est plutôt un outil théorique, sur lequel on raisonne abstraitement, ou par analogie.

1.4 Applications, injections et surjections.

Pour éviter d'avoir à se préoccuper de la légalité de la notation $f(x)$, on considère souvent des fonctions partout définies (c'est-à-dire telles que $\mathrm{D}_f = A$), qu'on appelle des *applications* (de A vers B) ; on peut toujours se ramener à ce cas par restriction de f à son domaine. C'est seulement pour des applications qu'on se préoccupe en général de résoudre la question analogue pour l'image (c'est-à-dire de savoir si l'on a $\mathrm{Im}(f) = B$) ; une application ayant cette propriété s'appelle une *surjection* (de A sur B), on dit encore que f est surjective. Cette propriété revient à dire que pour tout y de B, l'équation $f(x) = y$ a des solutions (dans A) ; plus généralement, on appelle *antécédent* de y par f tout élément x (de A) tel que $f(x) = y$ (on dit aussi que x est une *pré-image* de y), et l'on note $f^{-1}(y)$ l'ensemble des antécédents (ce qui d'ailleurs est maladroit, à cause des confusions que cela entraîne avec la notation des bijections réciproques que l'on verra plus loin) ; «l'application f est surjective» peut donc encore s'écrire $\forall y \in B$, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Déterminer si l'équation $f(x) = y$ a une solution unique, donc savoir si l'on a $f(x_1) = f(x_2) = y \Rightarrow x_1 = x_2$, amène à la notion d'*injection* : f est injective (ou : f est une injection de A vers B) si tout élément y de B a au plus un antécédent, donc s'il existe au plus un x tel que $f(x) = y$; pour une injection f, la notion de fonction réciproque a un sens, puisque à tout y de B correspond ainsi au plus un x de A

1.5 Bijections, bijection réciproque.

Mais en réalité, on ne s'intéresse vraiment à cette notion que quand f est à la fois injective et surjective; une telle application f s'appelle une *bijection* (de A vers B) ; elle fait correspondre à chaque élément de A un élément unique de B, et réciproquement; et on peut alors parler de la *bijection réciproque* de f (notée f^{-1}), allant de B vers A, et qui fait correspondre à chaque y de B son unique antécédent $x = f^{-1}(y)$, tel que $f(x) = y$. On voit, en appliquant cette définition, que f^{-1} est aussi une bijection, telle que (pour tout y de B) $f(f^{-1}(y)) = y$ (et donc que pour tout x de A, $f^{-1}(f(x)) = x$). Il est évident que f est la bijection réciproque de f^{-1}, c'est-à-dire que $(f^{-1})^{-1} = f$.

La démonstration de ce que f est une bijection passe souvent par le «calcul» de la bijection réciproque (on verra toutefois, à partir du chapitre 8, que pour des fonctions numériques, on possède souvent des critères plus généraux). Ce problème est souvent lié à l'établissement de «conditions nécessaires et suffisantes», ou encore à des problèmes «d'existence et d'unicité» ; un exemple «géométrique» est traité dans l'exercice-type n° 12.

1.6 Composition des fonctions.

Les écritures qui précédent amènent à définir plus généralement la composée de deux fonctions f et g, à condition que l'ensemble de départ de g soit l'ensemble d'arrivée de f; la notation $g(f(x))$ a alors un sens (pour tout x de D_f tel que $f(x) \in \mathrm{D}_g$) ; et la fonction ainsi définie s'appelle la *composée* de f et g (dans cet ordre) et se note $g \circ f$; on a donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

La composition des applications ressemble un peu à une multiplication (et on verra, en étudiant les applications linéaires, que l'analogie peut être rendue très complète), mais elle n'est possible que si $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{D}_g$ (ou plus précisément, le domaine de $g \circ f$ dépend de manière compliquée de ceux de f et g si cette condition n'est pas remplie) ; et, bien que certaines «formules» restent vraies (par exemple l'associativité $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$), la commutativité est fausse en général, c'est-à-dire que (le plus souvent) $g \circ f \neq f \circ g$.

On peut utiliser ces notations pour un véritable «calcul fonctionnel», on voit alors que pour pouvoir travailler en toute généralité, il faut accepter de considérer (et de noter) des fonctions apparemment sans aucun intérêt; ainsi, en notant Id_A la fonction identité de A, c'est-à-dire la bijection de A vers A définie par $\mathrm{Id}_A(x) = x$ (pour tout x de A), on a, si f est une fonction de A vers B, $f \circ \mathrm{Id}_A = \mathrm{Id}_B \circ f = f$, et f a pour bijection réciproque g si et seulement si $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. (C'est un simple exercice de traduction des définitions précédentes).

On peut obtenir ainsi l'importante formule

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \quad (f \text{ bijection de } A \text{ vers } B,\ g \text{ bijection de } B \text{ vers } C),$$

il suffit en effet de remarquer que $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_C$ (et d'effectuer le calcul analogue pour $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \ldots$).

1.7 Calculs fonctionnels.

En général, on est amené à fabriquer de nouvelles fonctions par des moyens assez variés; l'un des plus simples consiste à «prolonger» aux fonctions les calculs possibles sur leurs valeurs. Ainsi, pour des «fonctions numériques» allant par exemple de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on notera $f+g$ la fonction h, de domaine $D_f \cap D_g$, et définie par $h(x) = f(x)+g(x)$ (pour tout $x \in D_h$). Des définitions analogues sont faciles à établir pour fg, f^g, ou $(1+f^2)/\sqrt{g}$; on prendra cependant garde, dans ces derniers cas, à ce que le domaine de définition peut devenir assez délicat à déterminer. Si f va de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, il est de même possible de définir $\Re(f)$ comme la fonction $x \mapsto \Re(f(x))$, par exemple; avec ces conventions, on voit qu'une fonction comme $x \mapsto f(x) - f(-x)$ pourra se noter sans ambiguïté $f - f \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbf{R}})$. Ces notations nous serviront d'abréviations commodes en Analyse, mais on les verra se révéler tout à fait indispensables à partir du chapitre 19.

2 Fonctions non numériques.

2.1 Ensembles finis.

L'intuition montre qu'une bijection entre A et B réalise une correspondance entre chaque élément de A et chaque élément de B, ce qui veut dire que A et B ont le même nombre d'éléments. Pourtant, on a depuis longtemps remarqué (il semble que cette observation ait été formulée pour la première fois par Galilée !) que l'application $[n \mapsto 2n]$ réalise une mise en bijection des entiers et des nombres pairs, bien que le second ensemble soit strictement contenu dans le premier ! Cette affirmation, qui peut sembler un paradoxe, a été au contraire reconnue (par Cantor, vers 1880) comme fournissant une caractérisation des ensembles infinis, et permettant même de préciser leur taille. Dans le cas d'ensembles finis, le nombre d'éléments de A peut être défini de cette manière : on l'appelle le *cardinal* de A (noté Card (A), ou $\#A$); et si f est une injection de A vers B, on a $\#A \leq \#B$; si f est une surjection de A vers B, on a $\#A \geq \#B$.

Cette méthode permet de définir de véritables «nombres infinis» ; mais ceux-ci ont des caractéristiques très peu intuitives; ainsi on a Card $(\mathbf{N})$ = Card $(\mathbf{Q})$ (ce que Cantor notait $\aleph_0$) et l'on a bien $\aleph_0 <$ Card $(\mathbf{R})$, mais Card $(\mathbf{R})$ = Card $(\mathbf{R}^2)$!

2.2 Suites.

Une suite d'objets de B est tout simplement une application de $\mathbf{N}$ vers B, donnée par $u = [n \mapsto u_n]$; toutefois on n'utilise presque jamais dans ce cas la notation «normale» $u(n)$. Les définitions précédentes n'ont d'ailleurs que peu d'intérêt pour les suites, soit qu'elles soient inapplicables (composition), soit qu'elles ne soient pour ainsi dire jamais vérifiées (bijection, fonction réciproque). Cependant, on peut parfois remarquer d'utiles analogies entre suites et fonctions numériques, telles que le lien existant entre la dérivée et la transformation $u_n \to u_{n+1}$.

2.3 Transformations géométriques.

Une transformation géométrique est une application du plan (ou de l'espace) dans lui-même, et l'on ne s'intéresse même le plus souvent qu'à des bijections, telles donc que la transformation «inverse» (la bijection réciproque) existe. L'étude porte le plus souvent sur ce qui est conservé dans la transformation (points fixes tels que $f(P) = P$, conservation des distances si $f(A)f(B) = AB$, ...). Les propriétés du calcul «fonctionnel» permettent d'obtenir des résultats non évidents, on en verra un exemple en étudiant les rotations au chapitre 22.

2.4 Opérateurs et fonctionnelles.

Considérons la «transformation» qui associe à une fonction f (dérivable) sa dérivée f'. On peut considérer que c'est une fonction dont l'ensemble de départ est l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$, par exemple. Pour ne pas confondre ces deux types de fonctions, on utilise en général des notations un peu différentes; on écrira ici $D : f \mapsto D(f) = f'$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, après avoir défini $\mathcal{D}$ et $\mathcal{F}$ comme ensembles de fonctions. D est un *opérateur*, terme utilisé dans les cas où l'image d'une fonction est une autre fonction. Si l'image d'une fonction est un nombre, comme par exemple pour I défini par $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$, on dira plutôt que I est une *fonctionnelle.*

Ces situations nécessitent encore plus de précautions dans les écritures : ainsi, avec l'opérateur D vu plus haut, on a $D([\![x \mapsto x^4]\!]) = [\![x \mapsto 4x^3]\!]$, et une notation abrégée telle que $D(x^4) = 4x^3$ amènerait rapidement à des absurdités, par exemple en remplaçant x par 1, on trouverait $D(1) = 4\ldots$ On verra en TD d'Informatique que pour un langage symbolique tel que Maple V, ce genre d'écriture est compréhensible à condition de respecter des règles de syntaxe extrêmement rigoureuses; d'ailleurs, dans ce cas, l'énervement provoqué par les messages d'erreur de l'ordinateur amène bien vite à apprendre à ne pas négliger ces «détails» !

On s'entraînera à traduire pour des opérateurs les définitions vues en **1**; ainsi la question de savoir si D est surjective revient à se demander si toute fonction de $\mathcal{F}$ possède une primitive...

3 Fonctions numériques et ensembles de réels.

3.1 Définitions générales.

On va désormais (dans les chapitres 8 à 14) ne s'intéresser qu'aux fonctions numériques, c'est-à-dire aux fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, appelées encore «fonctions réelles d'une variable réelle». Certaines propriétés de ces fonctions peuvent être généralisées au cas complexe, et d'autres extensions sont possibles à des fonctions de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$ (les «fonctions à plusieurs variables»), mais nous n'en parlerons que brièvement, à la fin du chapitre 15.

Pour une fonction numérique, le domaine est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, le plus souvent une réunion d'intervalles pour des fonctions «élémentaires». Mais il est tout à fait possible de définir des fonctions très «irrégulières», par exemple la fonction f définie par : $f(p/q) = q$ si p/q irréductible, et $f(x)$ n'existe pas si x irrationnel. Ce genre de «monstre» mathématique peut malheureusement se rencontrer en pratique (bien que des applications en physique n'aient été trouvées que récemment); c'est justement la raison de l'étude soignée des propriétés des fonctions régulières (et des listes de ces fonctions) qui va nous occuper dans les chapitres suivants.

Les définitions générales de **1** correspondent à des propriétés du graphe (qui est une partie de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, c'est-à-dire du plan) qu'il faut bien connaître; on prendra garde toutefois à des interprétations trop intuitives : tous les graphes ne sont pas des courbes régulières ! Ainsi, la bijectivité de f se traduit par l'existence d'un point unique du graphe sur chaque «horizontale», et on peut démontrer le théorème affirmant alors que le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par rapport à $[\![Y = X]\!]$ (ce genre de démonstration nécessitant toutefois les quelques résultats de géométrie plane qui ont été rappelés au chapitre 3 ...).

3. 2 Propriétés liées à l'ordre.

Une des notions les plus importantes liées à l'ordre des réels est celle de fonction croissante : on dit que f est *croissante* si elle respecte l'ordre, c'est-à-dire si $x_1 \leq x_2$ entraîne $f(x_1) \leq f(x_2)$. (Plus précisément, f est croissante sur un ensemble I (le plus souvent un intervalle) si la propriété précédente est vraie pour tous les x_1 et x_2 de I.) On définit de manière analogue la notion de fonction *croissante stricte* sur I par la «formule» $(\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$; ou encore celle de fonction *décroissante* sur I par $(\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$. Ces diverses formules ont pour conséquence la conservation des inégalités (et donc des inéquations), c'est par exemple ce qui autorise à écrire $a^x < x \Rightarrow x \ln a < \ln x$.

On dira que f est *monotone* sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I; ce qu'on appelle l'étude des variations de f consiste essentiellement à déterminer les intervalles de monotonie de f.

La détermination du sens de variation d'une fonction ne peut malheureusement pas en général se faire à partir des définitions qui précédent; on sait qu'on peut ramener le problème à celui du signe de f' (quand le calcul de la dérivée est possible), ce qui sera démontré au chapitre 10.

Enfin, il convient d'insister sur le fait que toutes ces propriétés ne sont vraie (et souvent n'ont de sens) que pour des fonctions numériques; on verra en particulier au chapitre 15, par exemple, que des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ peuvent fort bien être de dérivée nulle part nulle, et pourtant être non injectives...

3. 3 Ensembles de réels.

Pour pouvoir formuler et démontrer rigoureusement certains résultats «évidents» (intuitivement) sur l'ordre et sur les fonctions monotones, il faut s'intéresser de plus près à la structure des ensembles de réels. On sait d'abord que $\mathbf{R}$ est «sans trous», c'est-à-dire qu'entre deux réels a et b il en existe d'autres ($(a + b)/2$ par exemple); contrairement à ce qui se passe dans $\mathbf{N}$. Mais en fait, $\mathbf{R}$ est même «sans lacunes», c'est à dire qu'on ne peut le partager en deux sous-ensembles sans «extrémités» (alors qu'on peut partager $\mathbf{Q}$ en : $A = \{q |\, q^2 > 2 \text{ et } q > 0\}$ et $B = \{q |\, q^2 < 2 \text{ ou } q < 0\}$). Cette propriété et d'autres analogues ne peuvent se démontrer qu'à partir d'une construction rigoureuse de $\mathbf{R}$, mais nous les admettrons (à titre d'axiomes); il est d'ailleurs possible de toutes les ramener au théorème de la borne supérieure.

Rappelons d'autre part quelques notations ensemblistes : si A et B sont deux ensembles, on note $A \cup B$ leur réunion, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux); $A \cap B$ est l'intersection, c'est-à-dire l'ensemble des éléments communs à A et B; $\mathbf{R} - A$, noté aussi $\overline{A}$ est le complémentaire de A, c'est-à-dire l'ensemble des réels n'appartenant pas à A.

Il est possible de construire un véritable «calcul ensembliste» (dû en partie à Boole, et généralisé par Cantor), on essaiera par exemple de vérifier les «lois de Morgan» :

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; et de montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Les propriétés liées à l'ordre que nous venons d'évoquer peuvent alors se traduire en «formules» ; c'est une théorie due à Dedekind, et qui peut même servir à construire les réels à partir de $\mathbf{Q}$.

Les démonstrations de résultats de ce genre nécessitent une technique précise et une approche rigoureuse, qui sera abordée en classe, mais on n'en verra des exemples importants qu'en Algèbre linéaire, ainsi qu'en Spé; c'est pourquoi il n'a pas été jugé utile de faire un véritable cours de Théorie des ensembles, qui demanderait d'ailleurs aussi un cours rigoureux de Logique. L'exercice-type n° 13 donne quelques indications sur la technique de rédaction nécessaire dans l'étude de ce genre de problèmes.

3.4 Le théorème de la borne supérieure et ses applications.

Il nous faut d'abord définir quelques termes : un sous-ensemble A de $\mathbf{R}$ est dit *majoré* par M (et M est appelé un majorant de A) si tous les éléments de A sont inférieurs (ou égaux) à M (donc $(\forall x \in A)(x \leq M)$) ; de même, on dit que A est *minoré* par m (et m est appelé un minorant de A) si $(\forall x \in A)(x \geq m)$). Il est clair que l'information donnée par un majorant M de A sera d'autant plus utile que M sera plus petit (il est vrai qu'un chat ne peut pas vivre plus de cinquante ans, mais c'est moins intéressant que de savoir que sa durée de vie est limitée à vingt ans) ; d'où l'intérêt de la recherche d'un plus petit majorant éventuel. Le résultat suivant en garantit justement l'existence :

Théorème de la borne supérieure. *Tout sous-ensemble majoré de* $\mathbf{R}$ *possède un plus petit majorant.*

Autrement dit,

$$(\exists M)(\forall x \in A)(x \leq M) \Rightarrow (\exists B)((\forall x \in A)(x \leq B) \text{ et } B' < B \Rightarrow (\exists x \in A)(x > B'))$$

(Cette formulation indigeste sera décortiquée en classe)

La démonstration de ce théorème, comme indiqué plus haut, est hors programme; elle repose sur une définition précise des réels, et pourrait servir à en fonder la théorie.

Le nombre B unique dont on vient d'affirmer l'existence est appelé la *borne supérieure* de A, et se note $\sup A$, ou encore $\sup\limits_{x \in A} x$; on verra en classe, sur l'exemple de la suite $u_n = 1 - 1/n$, que sa détermination rigoureuse, même dans les cas simples, est assez délicate.

En changeant x en $-x$, on obtient : *Tout sous-ensemble de* $\mathbf{R}$ *minoré possède un plus grand minorant* (c'est un exercice facile d'application des définitions) ; ce minorant s'appelle la *borne inférieure* et se note $\inf A$.

On déduit de ces résultats de nombreuses propriétés de «limites», comme on le verra plus tard; ainsi, soit u_n la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$; on montre aisément (par récurrence) qu'elle est croissante et majorée (par 2) ; $\sup u_n$ existe donc et est ≤ 2, mais déterminer sa valeur exacte est une toute autre affaire; on verra (au chapitre 12) que

$$\sup\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

et que dans ce cas (u_n croissante), on a justement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sup u_n$.

Il est enfin possible d'utiliser ce théorème pour étudier les «intervalles» de $\mathbf{R}$: il s'agit des ensembles de réels I tels que si $a \in I$ et $b \in I$, $a < x < b \Rightarrow x \in I$. Une analyse soignée montre que les seuls ensembles de $\mathbf{R}$ ayant cette propriété sont de l'une des 11 formes suivantes : $\emptyset$, $\{a\}$, $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$, $]a;b[$, $]-\infty;b]$, $]-\infty;b[$, $[a;+\infty[$, $]a;+\infty[$, et $\mathbf{R}$.

Certaines bornes supérieures sont particulièrement importantes en pratique; c'est ce qui se produit quand l'ensemble borné n'est pas donné de manière directe. Ainsi, le maximum d'une fonction sur un intervalle I est (en général) la borne supérieure des valeurs prises par la fonction sur I (c'est-à-dire de l'ensemble $f(I)$) ; on le note en général $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ ou $\sup\limits_{I} f$; et l'on verra à la fin du chapitre 9 pourquoi cette notion coïncide avec la définition usuelle du maximum pour les fonctions continues.

On consultera enfin avec profit l'exercice-type n° 13 pour voir comment on doit procéder pour démontrer de manière parfaitement rigoureuse des résultats «intuitifs» concernant toutes ces notions.

Exercices

1 Définitions générales.

1 ($\star$) $f\colon x \mapsto x^3 (\mathbf{R} \to \mathbf{R})$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Mêmes questions pour $g\colon z \mapsto z^3 (\mathbf{C} \to \mathbf{C})$

2 ($\star$) Montrer que (si f est une application, et A et B deux sous-ensembles de l'ensemble de départ de f), on a $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$ et $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$. A-t-on $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$?

3 ($\star\star$) Soit f et g deux applications ($f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$) telles que $g\circ f = \mathrm{Id}_A$; montrer que f est injective et g est surjective. Plus généralement, montrer qu'il en est de même si f et g sont deux applications ($f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$) telles que $g\circ f$ est bijective.

4 ($\star\star\star$) Énoncer une propriété réciproque de la précédente, et l'étudier.

T 12 Soit f l'application $f : t \mapsto f(t) = M_t$, de $\mathbf{R}$ dans le plan (muni d'un repère orthonormal), où les coordonnées de M_t sont données par les formules

$$M_t = \begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}.$$

Montrer que f est injective, et déterminer un sous-ensemble $\mathcal{B}$ du plan tel que $f\Big|^{\mathcal{B}}$ soit une bijection. Soit $M \in \mathcal{B}$ tel que $(\widehat{Ox, OM}) = \alpha$; calculer $f^{-1}(M)$ en fonction de α.

5 ($\star\star$) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques ($\mathbf{R} \to \mathbf{R}$), a un réel fixé; on note p_a la fonction de $\mathcal{F}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $p_a(f) = f(a)$. Déterminer le domaine et l'image de p_a. On restreint à présent p_a à l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications numériques. Montrer que p_a est une surjection. Montrer que l'application $a \mapsto p_a$ (dont on précisera l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée) est une injection.

2 Ensembles de réels et fonctions numériques.

6 ($\star$) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$ (quand A et B sont deux ensembles de réels majorés). Que peut-on dire de $\sup(A \cap B)$?

7 (R) Est-il vrai qu'on ait :

a) f et g croissantes $\Rightarrow f + g$ croissante ?

b) f et g croissantes $\Rightarrow fg$ croissante ?

(remarque : ne pas utiliser la dérivée; f et g peuvent être tout à fait quelconques !)

T 13 Soit f une injection croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; A un sous-ensemble non vide majoré de $\mathbf{R}$. Montrer que f est strictement croissante, que $\sup f(A)$ existe, que $\sup f(A) \leq f(\sup A)$, et donner un exemple où l'inégalité est stricte (on démontrera rigoureusement que cet exemple a bien toutes les propriétés souhaitées).

8 ($\star\star$) Donner un exemple de bijection (de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$) qui ne soit pas monotone (indication : utiliser des fonctions affines par intervalle)

9 ($\star\star\star$) Soit f une application numérique strictement croissante telle que $f(0) > 0$ et qu'il existe un plus petit x noté x_0 tel que $f(x_0) = x_0$. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; montrer que $L = \sup(u_n)$ existe et que $L \leq x_0$. A-t-on nécessairement $L = x_0$?

7. LE LANGAGE DES FONCTIONS

Plan

7. LE LANGAGE DES FONCTIONS

(Formulaire)

1 Fonctions générales.

Définition 1. 1. *On appelle* **fonction de** A **vers** B *une correspondance* f *telle qu'à tout élément* x *de* A *correspond au plus par* f *un élément de* B*, noté* $f(x)$*.* A *est appelé l'***ensemble de départ** *de* f *(ou* **source***) ;* B *est appelé l'***ensemble d'arrivée** *(ou* **but***).*

Définition 1. 2. *On appelle* **application de** A **vers** B *une fonction de* A *vers* B *définie pour tout élément de* A *(c'est-à-dire qu'à tout élément de* A *correspond un élément (et un seul) de* B*).*

Définition 1. 3. *L'élément* $f(x)$ *s'appelle* **l'image de** x **par** f *;* x *est appelé un* **antécédent** *(ou une* **pré-image***) de* $f(x)$*.*

Définition 1. 4. *On appelle* **domaine de** f *(et on note* D_f*) l'ensemble des* x *de* A *tels que* $f(x)$ *soit défini; on appelle* **image de** f *(et on note* $\mathrm{Im}(f)$*) l'ensemble des éléments de* B *ayant un antécédent.*

Définition 1. 5. *Plus généralement, si* $A' \subset A$*, on note* $f(A')$ *l'ensemble des images des éléments de* A'*, et si* $B' \subset B$*, on note* $f^{-1}(B')$ *l'ensemble (éventuellement vide) des antécédents des éléments de* B'*.*

Définition 1. 6. *On appelle* **graphe** *de* f *(que l'on note* $\mathcal{G}_f$*, par exemple) l'ensemble des couples de* $A \times B$ *de la forme* $(x, f(x))$*.*

Définition 1. 7. *Si* f *est une fonction de* A *vers* B*, on appelle* **restriction de** f **à** A' *(avec* $A' \subset A$*) et on note* $f|_{A'}$ *la fonction* g *de* A' *vers* B *telle que pour tout élément* x *de* $A' \cap \mathrm{D}_f$*, on ait* $g(x) = f(x)$ *; de même, on appelle* **restriction de** f **à** B' *(avec* $B' \subset B$*) et on note* $f|^{B'}$ *la fonction* g *de* A *vers* B *telle que pour tout élément* x *de* $A \cap \mathrm{D}_f$*, on ait* $g(x) = f(x)$ *si* $f(x) \in B'$*, et qui n'est pas définie sinon.*

Voici, pour être complet, une traduction «ensembliste» de ces définitions : en notant $x \mathcal{R} y$ la relation de correspondance entre x (appartenant à A) et y (appartenant à B) définie par f (c'est-à-dire que $x \mathcal{R} y \iff (x, y) \in G_f$), on a

$$\text{"}f \text{ est une fonction de } A \text{ vers } B\text{"} \iff (\forall y_1, y_2 \in B)(x \mathcal{R} y_1 \text{ et } x \mathcal{R} y_2 \Rightarrow y_1 = y_2)$$

$$\text{"}f \text{ est une application de } A \text{ vers } B\text{"} \iff \text{"}f \text{ est une fonction de } A \text{ vers } B\text{"} \text{ et } (\forall x \in A)(\exists y \in B)(x \mathcal{R} y)$$

et (par exemple)

$$x \in f^{-1}(B') \iff (\exists y)(y \in B' \text{ et } y = f(x)).$$

Mais ce genre de «formule» n'est pas vraiment au programme; il faut plutôt les voir comme des exercices d'entraînement à ce type de codage, dont des exemples plus utiles seront donnés au chapitre 9.

Définition 1. 8. f *est une* **injection** *de* A *vers* B *(on dit aussi que* f *est* **injective***) si* f *est une application, et si tout élément de* B *possède* **au plus** *un antécédent par* f*.*

$$f \text{ (application de } A \text{ vers } B) \textit{ injective} \overset{\text{def}}{\iff} \forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Définition 1.9. *f est une* **surjection** *de A vers B (on dit aussi que f est* **surjective***) si f est une application, et si tout élément de B possède* **au moins** *un antécédent par f.*

$$f \text{ (application de } A \text{ vers } B) \text{ est } \textit{surjective} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y).$$

Définition 1.10. *f est une* **bijection** *de A vers B (on dit aussi que f est* **bijective***) si f est une injection et une surjection, c'est-à-dire si f est une application telle que tout élément de B possède* **exactement** *un antécédent (et un seul) par f.*

$$f \text{ (application de } A \text{ vers } B) \text{ est } \textit{bijective} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall y \in B)(\exists_1 x \in A)(f(x) = y).$$

Définition 1.11. *Si f est une bijection (de A vers B), on appelle* **bijection réciproque** *de f, et on note f^{-1}, la bijection qui à tout élément de B associe son antécédent par f.*

$$x = f^{-1}(y) \overset{\text{def}}{\iff} y = f(x).$$

Définition 1.12. *Si f est une fonction de A vers B, et si g est une fonction de B vers C, on appelle* **composée de** *f* **et de** *g (dans cet ordre) et on note $g \circ f$ la fonction de A vers C telle que, pour tout x tel que le membre de droite soit défini,*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Définition 1.13. *On appelle* **identité** *(ou* **application identique***) de A, et on note Id_A, l'application définie par*

$$(\forall x \in A)(\mathrm{Id}_A(x) = x).$$

La composition vérifie les propriétés suivantes (en convenant que $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$)

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \text{(associativité)}$$

$$\mathrm{Id}_B \circ f = f \circ \mathrm{Id}_A = f$$

et (si f est bijective)

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \text{ et } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$$

Mais on a en général (même si $A = C$)

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Enfin, si f et g sont des bijections,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Définition 1.14. *Si f et g sont deux fonctions de A dans $\mathbf{C}$, par exemple, on note $f + g$ la fonction h ayant pour domaine $D_f \cap D_g$ et telle que (pour tout $x \in D_h$) $h(x) = f(x) + g(x)$; des définitions similaires sont possibles pour fg, f/g (en prenant alors $D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x \in D_g \ / \ g(x) \neq 0\}$), etc.*

2 Fonctions numériques, ensembles de réels.

Définition 2. 1. *On appelle* **intervalle de R** *un sous-ensemble I de* **R** *tel que*

$$(\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 \leq x \leq x_2 \Rightarrow x \in I)$$

Les seuls sous-ensembles de **R** ayant cette propriété sont de l'une des 11 formes suivantes : $\emptyset$, $\{a\}$, $[a; b]$, $[a; b[$, $]a; b]$, $]a; b[$, $]-\infty; b]$, $]-\infty; b[$, $[a; +\infty[$, $]a; +\infty[$, et **R**.

Définition 2. 2. *Si I est un intervalle de* **R***, f (application de I dans* **R***) est dite* **croissante** *sur I si*

$$(\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$

De même, f est **strictement croissante** *sur I si*

$$(\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

f est **décroissante** *sur I si $-f$ est croissante, c'est-à-dire si*

$$(\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

et f est **strictement décroissante** *sur I si $-f$ est strictement croissante. Enfin, on dit que f est* **monotone** *sur I si f est croissante sur I, ou si f est décroissante sur I.*

Définition 2. 3. *Si A est un sous-ensemble (non vide) de* **R***, on dit que M est un* **majorant** *de A (ou que M* **majore** *A) si*

$$(\forall x \in A)(x \leq M).$$

De même, on dit que m est un **minorant** *de A (ou que M* **minore** *A) si*

$$(\forall x \in A)(m \leq x).$$

On a le

Théorème de la borne supérieure. *Tout sous-ensemble majoré de* **R** *possède un plus petit majorant.*

Autrement dit,

$$(\exists M)(\forall x \in A)(x \leq M) \Rightarrow (\exists B)((\forall x \in A)(x \leq B) \text{ et } B' < B \Rightarrow (\exists x \in A)(x > B'))$$

D'o- la

Définition 2. 4. *Soit A un sous-ensemble de* **R** *majoré; le plus petit majorant de A s'appelle la* **borne supérieure** *de A (et on le note $\sup(A)$, ou $\sup\limits_{x \in A} x$). On a donc (si A est majoré)*

$$(\forall x \in A)(x \leq \sup(A)) \text{ et } M < \sup(A) \Rightarrow (\exists x \in A)(x > M))$$

Définition 2. 5. *De même, si A est minoré, on appelle* **borne inférieure** *de A (et on note $\inf(A)$, ou $\inf\limits_{x \in A} x$) le plus grand minorant de A. On a donc*

$$(\forall x \in A)(x \geq \inf(A)) \text{ et } m > \inf(A) \Rightarrow (\exists x \in A)(x < m)).$$