6. ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Ce chapitre étudie des équations dont le point commun est que les inconnues (variables ou fonctions) qui y interviennent apparaissent sous forme de «combinaisons linéaires», c'est-à-dire de sommes «pondérées» par des coefficients, telles que l'équation «ordinaire» $2x+3y+z=5$ ou l'équation différentielle $2y''+3y'+y=5$; la caractéristique commune des méthodes de résolution est la possibilité de combiner entre elles ces équations pour aboutir à des équations plus simples.

1 Systèmes d'équations linéaires.

1.1 Transformations élémentaires.

Partant d'un système d'équations linéaires tel que $(S):\begin{cases} x+2y-3z=1 & (E_1)\\ 2x+y+3z=2 & (E_2)\\ x-y+z=3 & (E_3)\end{cases}$, il est clair que si (x_0,y_0,z_0) est une des solutions de (S), ce sera également une solution de toute combinaison des équations de S, par exemple du système

$$(S'):\begin{cases} x+2y-3z=1 & (E'_1)=(E_1)\\ 3x+3y+3z=2 & (E'_2)=(E_1)+(E_2)\\ x-y+z=3 & (E'_3)=(E_3)\end{cases},$$

mais que réciproquement on peut, partant d'une solution du système (S'), montrer qu'elle est également solution du système (S) en remarquant que $(E_2)=(E'_2)-(E'_1)$.

Les transformations de systèmes d'équations ayant cette propriété sont appelées des *transformations élémentaires*; en pratique, il y en a de trois types :

- l'échange d'équations (dont l'intérêt principal est d'obtenir la présentation triangulaire qu'on verra plus bas); on le note $(E_3)\leftrightarrow(E_5)$ par exemple,
- la multiplication d'une équation par une constante non nulle (dont l'intérêt principal est de se débarrasser des fractions); on la note $(E_4)\rightarrow k(E_4)$ par exemple,
- et la combinaison d'une équation avec les autres, qu'on note par exemple $(E_2)\rightarrow (E_2)+a(E_1)+c(E_4)+d(E_5)$; l'utilisation des deux dernières transformations simultanément se notant (par exemple) $(E_2)\rightarrow k(E_2)+a'(E_1)+c'(E_4)+d'(E_5)$, où k doit être non nul.

1.2 Systèmes triangulaires.

On dit qu'un système est *triangulaire* (ou *échelonné*) si chaque équation contient (au moins) une inconnue de moins que la précédente. Ainsi, le système suivant est triangulaire : $(T):\begin{cases} x+2y-z=1 & (E_1)\\ y+3z=2 & (E_2)\\ z=-2 & (E_3)\end{cases}$. Un tel système se résoud de manière évidente par substitutions successives en partant de la dernière équation : $z=-2 \Rightarrow (E_2)\ y=8 \Rightarrow (E_1)\ x=15$. L'objectif est donc de se ramener à un système triangulaire par transformations élémentaires successives, de façon à ne pas changer l'ensemble des solutions.

1.3 Codage par matrices.

Recopier sans cesse les équations peut s'avérer fastidieux; une première idée de simplification est de n'écrire que les coefficients sous forme d'un tableau, avec un codage convenable. Un tel tableau s'appelle une *matrice*, et nous verrons au chapitre 18 qu'elles ont de nombreuses autres applications, une fois définies des règles de calcul les concernant, et en particulier le produit matriciel. Mais pour l'instant, nous ne les utiliserons que comme abréviation : le système (S) ci-dessus, par exemple, sera codé par la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, ou, si l'on veut préciser le codage, par $M = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & = \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$. Avec le même codage, le système (T) devient la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; on dit que cette matrice (ou celle formée seulement des trois première colonnes) est une *matrice triangulaire (supérieure)*.

La notation rigoureuse de ce genre de tableau se fait de manière systématique (qui sera approfondie elle-aussi au chapitre 18) : si A est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes, par exemple, on note ses coefficients (les nombres apparaissant dans la matrice) par ce qu'on appelle une notation en double indice : a_{23} désigne l'élément de la deuxième ligne et de la troisième colonne; on écrira ainsi

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 4}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix};$$

dans le cas des systèmes de ce chapitre, il arrivera souvent, d'ailleurs, qu'on écrive $a_{14} = b_1$, $a_{24} = b_2$, etc.

1.4 Méthode du pivot de Gauss.

La méthode du pivot est un procédé systématique (un *algorithme*) pour obtenir un système triangulaire à l'aide de transformations élémentaires. Voici la rédaction par cette méthode de la résolution du système (S) précédent : on commence par le coder par la matrice $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & = \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$, puis on exécute les transformations élémentaires suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix};$$

on a donc $-5z = 2 \Rightarrow z = -2/5$, puis $-3y + 9z = 0 \Rightarrow y = 3z = -6/5$, et enfin $x + 2y - 3z = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y + 3z = 1 + 12/5 - 6/5 = 11/5$.

Dans le cas général, considérons le système à m équations et n inconnues :

$$(S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

En codant le système (S) par la matrice de ses coefficients (matrice à m lignes et $n+1$ colonnes), on voit que les transformations élémentaires correspondent à des transformations élémentaires sur les lignes (échanges et combinaisons linéaires) ; la résolution du système sera facile si l'on parvient à ramener cette matrice à une matrice triangulaire. Supposons alors d'abord que $a_{11} \neq 0$. On peut remplacer (successivement, mais c'est équivalent à le faire simultanément) la ligne L_i (pour $i > 1$) par $(\star) L_i - (a_{i1}/a_{11}) L_1$, ou, si l'on veut éviter les fractions, par $(\star\star) a_{11} L_i - (a_{i1} L_1)$, ce qui revient à fabriquer une matrice (et un système (S')) équivalente, dont la première colonne est $(a_{11}, 0, \ldots, 0)$. Si alors a'_{22} n'est pas nul, on recommence (annulant ainsi les éléments de la deuxième colonne «en dessous» de a'_{22}), et par récurrence on aboutit à une matrice «triangulaire». Supposons à présent qu'à une étape donnée, on ait $a_{kk} = 0$. Alors, ou bien tous les éléments a_{kj} (pour $j \geq k$) sont nuls, ou bien on peut effectuer l'opération après avoir permuté les lignes k et j. L'élément a_{kj} (non nul) finalement utilisé dans la substitution de lignes $(\star)$ s'appelle un *pivot*; on peut en fait le choisir arbitrairement (après l'avoir amené sur la diagonale) ; en pratique (informatique) on essaie d'optimiser ce choix pour améliorer la précision des calculs ou les simplifier.

Quel que soit le choix exact des pivots, on aboutit finalement à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}
a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a'_{kk} & \cdots & a'_{kn} & b'_k \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_{k+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_m
\end{pmatrix}$$

(où les a'_{ii} sont non nuls pour $i \leq k$) ; il faudra en général pour y parvenir échanger certaines colonnes (comme on le verra en classe), ce qui revient à changer l'ordre des inconnues du système (S).

Il ne reste plus qu'à résoudre le système correspondant à cette nouvelle matrice. On voit d'abord que si les b'_i (pour $i > k$) ne sont pas tous nuls, (S) n'a pas de solution ; sinon, on peut prendre arbitrairement les valeurs des inconnues x_i, ce qui ramène au cas $k = n$; (S) a alors une solution unique, obtenue de proche en proche, et le produit des a'_{ii} apparait dans cette solution au dénominateur ; on le retrouvera au chapitre 20 sous le nom de *déterminant*.

2 Équations différentielles linéaires.

2.1 Définitions.

Une équation différentielle est une relation entre les valeurs d'une fonction et celles de ses dérivées successives (telle par exemple que $[(f''(x))^2 + f(x) = \cos x]$) ; les solutions sont les fonctions vérifiant (en tout point x) la relation donnée.

Pour simplifier l'écriture, on note la fonction inconnue par la lettre y ; l'équation donnée plus haut s'écrit donc $[y''^2 + y = \cos x]$.

Nous ne nous intéressons ici qu'à des équations linéaires, c'est-à-dire où n'interviennent pas de puissances des dérivées, de produits, etc. (et même à des équations linéaires à coefficients constants), telles que $[3y'' - 2y' + y = \sin x]$ par exemple ; on dit que $\sin x$ est le second membre, et que l'équation est du second ordre, parce que n'interviennent que les dérivées première et seconde.

2.2 Équations du premier ordre.

Le cas des équations du premier ordre, sans second membre, est facile à résoudre ; en effet, $y' - ay = 0$ équivaut à $y'/y = a$; et comme y'/y est la dérivée de $\ln|y|$, on obtient $\ln|y| = ax + C^{te}$, d'où on tire $y = Ke^{ax}$ (où K est une constante arbitraire).

Plus généralement, les équations de la forme $a(x)y' + b(x)y = 0$ se résolvent si on connaît une primitive de $-b/a$, c'est-à-dire une fonction F telle que $F'(x) = -b(x)/a(x)$; on a alors $y(x) = Ke^{F(x)}$ (au moins en pratique ; certaines difficultés théoriques seront soulevées au chapitre 17).

On va utiliser la linéarité pour résoudre le cas des équations avec second membre (de la forme $(E) : a(x)y' + b(x)y = d(x)$ dont on connaît une «solution particulière» y_0 (donc $ay_0'(x) + by_0(x) = d(x)$ pour tout x). Posant $Y = y - y_0$, on voit que si y est solution de (E), on aura $a(x)Y' + b(x)Y = (a(x)y' + b(x)y - a(x)y_0' - b(x)y_0 = d(x) - d(x) = 0$, et donc que Y sera solution de l'équation $(E_0) : aY' + bY = 0$; on dit que (E_0) est l'équation «sans second membre» associée à (E). Ainsi, si on sait résoudre (E_0) et si l'on connait une solution y_0, les solutions de (E) s'en déduisent.

Déterminer y_0 se fait en général par la *méthode d'identification* : on «devine» la forme de y_0, le plus souvent de la même forme que le second membre $d(x)$, on substitue cette forme dans l'équation, et on identifie les coefficients inconnus. Ainsi, soit à résoudre l'équation $y' - 2y = x^2$; on propose comme y_0 un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$; substituant dans l'équation, on en déduit que $(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2$, ce qui, par identification, aboutit au système (triangulaire)

$$(S) : \begin{cases} -2a = 1 & \text{(termes en } x^2\text{)} \\ 2a - 2b = 0 & \text{(termes en } x\text{)} \\ b - 2c = 0 & \text{(termes constants)} \end{cases}$$

, d'où $a = -1/2$, $b = -1/2$, $c = -1/4$, et finalement à la solution «générale» $y = Ke^{2x} - (2x^2 + 2x + 1)/4$, où K est une constante arbitraire. Lorsque la méthode d'identification échoue (par exemple parce que $d(x)$ n'est pas d'une forme assez simple pour qu'on puisse deviner y_0), on verra au chapitre 17 une méthode systématique (la méthode de variation de la constante) utilisant un calcul d'intégrale pour déterminer y_0.

3 Équations du second ordre.

3.1 Équations du second ordre sans second membre.

Par analogie avec le résultat de **1**, on va d'abord chercher les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ qui sont de la forme $y(x) = e^{kx}$. Un calcul d'identification montre que k doit alors vérifier l' «équation caractéristique» : $ak^2 + bk + c = 0$. Mais comme cette équation n'a pas toujours de solutions réelles, il est nécessaire de définir la fonction e^{kx} lorsque k est complexe.

3.1.1 <u>La fonction $x \mapsto e^{kx}$ quand k est complexe.</u>

L'apparition d'exponentielles dans la solution de l'équation du premier ordre, et les formules d'Euler, ont amené celui-ci à envisager d'introduire des fonctions à valeurs complexes dans des équations différentielles (il existe d'ailleurs d'autres types d'équations différentielles pour lesquelles cette méthode réussit, par exemple l'équation $x^2y'' + axy' + by = 0$). Mais pour cela, il faut savoir dériver ces fonctions !

Un calcul direct (il sera fait en classe) montre que la fonction $e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ a pour dérivée (en généralisant un peu les règles usuelles) : $(a + ib)e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$, en d'autres termes la fonction (e^{kx}) a pour «dérivée» ke^{kx}, même si k est complexe. La méthode qui suit pour résoudre les équations du second ordre utilise cette idée ; l'analyse soignée qui sera faite au chapitre 17 montre qu'en réalité, on utilise cette notation pour «deviner» rapidement des solutions de l'équation, mais que l'utilisation des complexes n'est pas vraiment nécessaire dans la résolution...

3. 1. 2 Cas réel.

Si le discriminant de l'équation caractéristique (avec k inconnu) est positif, on a donc deux «solutions particulières» (non proportionnelles) $e^{k'x}$ et $e^{k''x}$ (où k' et k'' sont donnés par les formules habituelles) ; un théorème dû à Cauchy affirme alors que toutes les solutions de l'équation différentielle sont «combinaison linéaire» des deux premières :

$$y(x) = Ae^{k'x} + Be^{k''x} \text{ (où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes arbitraires)}$$

3. 1. 3 Cas complexe.

Si le discriminant est négatif, on utilise l'exponentielle complexe : en posant $k_1 = K+i\omega$ (avec $K = -b/2a$ et $\omega^2 = (4ac-b^2)/4a^2$), on «devine» des solutions de la forme $e^{Kx}(\cos\omega x)$ et $e^{Kx}(\sin\omega x)$; la théorie de Cauchy donne comme solution générale :

$$y(x) = e^{Kx}(A\cos\omega x + B\sin\omega x),$$

que les méthodes de linéarisation du chapitre 3 (**7. 5**) nous ont appris à mettre sous la forme $y(x) = Ce^{Kx}\cos(\omega x + \varphi)$.

Enfin, quand le discriminant est nul, e^{Kx} est bien encore solution, mais il en faut une seconde (non proportionnelle), on vérifiera que xe^{Kx} convient (il faut bien reconnaître que ce choix est difficile à justifier...), d'où la solution générale :

$$y(x) = (Ax + B)e^{Kx}.$$

D'un point de vue pratique, on recherche en général une solution précise de l'équation, en d'autres termes une fonction vérifiant, outre l'équation différentielle, certaines conditions supplémentaires. Ainsi, en mécanique, une équation différentielle donnera l'ensemble de tous les mouvements possibles soumis à certaines forces, mais le mouvement réel dépendra des «conditions initiales» (vitesse initiale par exemple) imposées au mobile. Cela se traduit, comme on le verra en Physique, par la donnée des valeurs $y(0)$ (la position initiale) et $y'(0)$ (la vitesse initiale). Déterminer alors le mouvement effectif reviendra donc à calculer les constantes A et B pour que la fonction y vérifie ces conditions.

3. 1. 4 Graphes des solutions.

Les fonctions que nous venons d'obtenir ont des graphes très caractéristiques, et leur étude peut se faire aisément à l'aide des méthodes du chapitre précédent (et aussi, comme on le verra plus tard, par les méthodes «qualitatives» du chapitre 7) ; on remarquera par exemple que la fonction $f : x \mapsto e^{-Kx}\cos\omega x$ «oscille» entre les deux exponentielles e^{-Kx} et $-e^{-Kx}$, qu'elle «touche» pour $x = k\pi/\omega$; sa dérivée vaut $e^{-Kx}(-K\cos\omega x - \omega\sin\omega x)$ que, comme plus haut, on met sous la forme $Ae^{-Kx}\cos(\omega x+\varphi)$ pour déterminer les extremums de f. On dit souvent que $T = 2\pi/\omega$ est la pseudo-période de f. Dans le cas où on fait varier les paramètres (celui représentant la «résistance», ou le «frottement», par exemple) d'une équation différentielle de ce type, on passe souvent de solutions de cette forme (dite *faiblement amortie*) aux solutions rapidement décroissantes sans oscillations vues en **1**, et qu'on dit *fortement amorties* ; le cas particulier d'une racine double de l'équation caractéristique s'appelle alors le régime *critique*.

3.2 Équations avec second membre.

Comme on l'a vu pour les équations du premier ordre, si on connait une solution particulière y_0 d'une équation de la forme $ay'' + by' + cy = g(x)$, toutes les autres solutions sont de la forme $y(x) = y_0(x) + Y(x)$, où Y vérifie l'équation (sans second membre) associée $aY'' + bY' + cY = 0$.

Il reste donc à trouver une solution particulière; là encore, on devine en pratique la «forme» de y_0, et on ajuste les coefficients par la méthode d'identification.

Un cas particulier important est celui où le second membre est constant (c'est-à-dire $ay'' + by' + cy = d$); il est évident que $y_0 = d/c$ convient. En pratique (en Électricité), on rencontre aussi des seconds membres du type $d \cos kx$; on cherche alors une solution y_0 de forme «analogue» ($d_0 \cos(kx+\varphi)$), obtenant des formules très classiques qui vous seront rappelées en Physique et en Techno (voir aussi les remarques suivant l'encadré).

On rencontre enfin des seconds membres «constants par intervalles» (fonctions «échelons» et «créneaux»); ils se traitent par la méthode de «raccordement», qu'on verra au chapitre 17.

L'encadré suivant, et qui pourrait constituer un exercice type, montre un exemple plus compliqué encore (et sans doute dépassant déjà largement les besoins des utilisateurs); d'autres exercices seront traités en classe, et des méthodes moins «bricolées» seront vues au chapitre 17 (mais en fait, les indications qui précédent couvrent la plupart des cas qu'on sait résoudre).

Résolution de (E) : $y'' + 2y' + 2y = x + e^x + \cos x$

1) Résolvons d'abord l'équation sans second membre : $Y'' + 2Y' + 2Y = 0$; on doit donc résoudre l'équation caractéristique $(*)$ $k^2 + 2k + 2 = 0$

Attention, cette formulation est un sévère «abus de langage», il faudrait (pour une rédaction soignée) rappeler qu'on a posé $Y = \exp(kx)$, et peut-être même montrer que k vérifie bien $(*)$

On trouve $k = -1 + i$ ou $k = -1 - i$; on en déduit que la solution générale est de la forme $Y = Ae^{-x} \cos(x + \varphi)$

2) On cherche à présent une solution particulière : on devine qu'elle doit être de la forme $Ax + B + Ce^x + D\cos x + E \sin x$ (des règles couvrant les cas usuels seront données en classe). Par identification, on trouve : $2A = 1$ (terme «en x»); $2A + 2B = 0$ (terme constant); $5C = 1$ (terme en e^x); et le système (venant des termes en $\cos x$ et $\sin x$) : $D + 2E = 1$ et $E - 2D = 0$; d'où la solution

$$y_0(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{e^x + \cos x + 2\sin x}{5}$$

3) Il ne reste plus qu'à conclure : la solution générale de (E) est :

$$y(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{e^x + \cos x + 2\sin x}{5} + Ae^{-x}\cos(x+\varphi)$$

Les utilisateurs des méthodes que nous venons de voir ont développé des raccourcis et une terminologie adaptée à leurs besoins; et en particulier, certaines des formules que nous venons d'obtenir risquent de rappeler des souvenirs aux élèves ayant fait de l'électronique (ou de l'électrotechnique), mais les termes «exponentiels» doivent leur paraître bizarres! Pour comprendre ce qui se passe, il faut savoir que dans les équations usuelles des circuits oscillants (les circuits «RLC»), le «second membre» correspond au courant imposé (la tension aux bornes), et la solution $Y(t)$ est toujours de la forme $e^{-kt}(\ldots)$, c'est-à-dire qu'elle tend très rapidement vers 0, et qu'il ne reste donc plus en pratique que $y(t) \simeq y_0(t)$, qu'on appelle le régime stationnaire (et auquel correspondent les formules d'impédance complexe qu'on vous a peut-être apprises). Quand à $Y(t)$, c'est le «régime transitoire», oscillations (dont on a vu la forme en **3. 3**) rapides et pouvant être d'amplitude importante, qui se produisent quand on branche le circuit, mais qui disparaissent si vite qu'on peut les négliger

---

Exercices

1 ($\star$) Résoudre le système (d'inconnues x, y, z et t) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+t=2 \\ x+z+t=-1 \\ y+z+t=-2 \end{cases}$.

2 ($\star\star$) Résoudre (et discuter en fonction du paramètre a) le système (d'inconnues x, y, z et t)

$$\begin{cases} ax+y+z+t=a \\ x+ay+z+t=a \\ ax-y-z+t=a-2 \\ x-ay-z-t=-a-2 \end{cases}$$

3 ($\star\star\star$) Déterminer dans quels cas le système (d'inconnues x, y, z, t et u)

$$\begin{cases} x+y+z+t+au=0 \\ x+y+z+at+u=0 \\ x+y+az+t+u=0 \\ x+ay+z+t+u=0 \\ ax+y+z+t+u=0 \end{cases}$$

admet d'autres solutions que la solution «triviale $x=y=z=t=u=0$.

4 (R) Résoudre $y'+y=0$ et $y''+y=0$

5 ($\star\star$) Résoudre (et discuter) $y''+ay=0$

6 ($\star\star$) Résoudre (et discuter) $y''+2y'+ay=0$

7 ($\star$) Résoudre $y''+y'-2y=a$

8 ($\star\star$) Résoudre $y''+4y'-5y=x^3+2x-1$

9 ($\star\star\star$) Résoudre $y''+y=\sin x+\sin 2x$

10 ($\star\star$) Résoudre $2y''+3y'-5y=x^2+e^{2x}+\sin x$

11 ($\star\star\star$) Résoudre $y''+y'+y=x^2\sin x$

12 ($\star\star\star$) Résoudre $y''+y=x^2\sin x$

13 ($\star\star\star$) Résoudre $y''-2y'+5y=xe^{-x}\sin x$

6. ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Plan