# 7. TECHNIQUES COMBINATOIRES

## Un peu d'arithmétique.

Bien que les propriétés des entiers, très élémentaires au demeurant, que nous allons examiner, soient en principe hors-programme, les méthodes de raisonnement qui suivent constituent une gymnastique utile; de plus, ce type d'analyse intervient très fréquemment en informatique (théorique), et il semble donc prudent de se familiariser avec elle; enfin, nous verrons au prochain chapitre que ces propriétés se généralisent en partie aux polynômes.

### Divisibilité.

Les premières propriétés «non évidentes» de l'arithmétique des entiers portent sur la divisibilité : on dit que $a$ *divise* $b$ (noté parfois $a \mid b$, et la non divisibilité se note $a \not\mid b$) si $b/a$ est entier. Les nombres qui divisent $a$ s'appellent les *diviseurs* de $a$; et les nombres «sans diviseurs» (ou plus précisément divisibles seulement par 1 et eux-mêmes) sont les nombres *premiers*; par convention, 1 n'en fait pas partie, et la liste des nombres premiers est donc $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$; on a vu au chapitre 1 le raisonnement par l'absurde (dû à Euclide) qui prouve qu'elle est infinie. Pour étudier ce genre de questions, les méthodes algébriques sont généralement tout à fait insuffisantes; l'utilisation de la notation $b = ad$ pour dire que $a$ divise $b$ ne permet de prouver que des résultats très élémentaires, tels que la «transitivité» : $a \mid b$ et $b \mid c \Rightarrow a \mid c$; plus généralement, résoudre des équations dans $\mathbf{N}$ ou dans $\mathbf{Z}$ (qu'on appelle traditionnellement des équations diophantiennes) est extrémement difficile en général (qu'on pense au grand théorème de Fermat) et nécessite le plus souvent des méthodes différentes pour chaque équation!

### L'algorithme d'Euclide.

Pour aller plus loin dans l'étude des question de divisibilité, on introduit d'abord la «division euclidienne» : c'est la division «avec reste», c'est-à-dire que $a = bq + r$ est la division euclidienne de $a$ par $b$ si $r$ (entier positif) est $< b$ ($q$ s'appelle le *quotient* (euclidien) et $r$ le *reste*. (Une preuve d'existence et d'unicité sera donnée en classe, elle repose sur l'encadrement de $a/b$ par des entiers). La recherche de diviseurs communs à $a$ et $b$ amène alors à remarquer qu'ils divisent aussi $r$ (plus précisément, les diviseurs communs à $a$ et $b$ sont ceux communs à $b$ et $r$); on en déduit une méthode (par divisions successives) de recherche du plus grand diviseur commun à $a$ et $b$ (le PGCD de $a$ et $b$) :

**Algorithme d'Euclide** (on suppose $a > b$)

1) Poser $(a_0, b_0) = (a, b)$

2) Division euclidienne : $a_n = b_n q + r_n$

3) Si $r_n$ est nul, $b_n$ est le PGCD, Sinon

4) Poser $a_{n+1} = b_n ; b_{n+1} = r_n$ et aller à 2)

(les notations indicées utilisées ici seront précisées en **2. 1**)

En fait, cette technique apporte d'autres renseignements ; on verra en classe sur un exemple comment en déduire le «théorème de Bezout» : $a$ et $b$ premiers entre eux ($\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$) $\iff$ (il existe $p$ et $q$ dans $\mathbf{Z}$ tels que $ap + bq = 1$), ce qui parmet de résoudre l'équation $ax + by = c$ (avec $x, y \in \mathbf{Z}$).

On peut alors prouver l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, c'est-à-dire le fait que l'écriture de $n$ comme produit de facteurs premiers est unique (à l'ordre des facteurs près) ; on se convaincra qu'elle n'était pas «intuitivement» évidente !

**La fonction «partie entière».**

Une autre technique utile consiste à déterminer des entiers dans un intervalle donné (par exemple pour résoudre une équation telle que $\tan 41x = 1$, avec $11 < x < 23$ (ce qui revient à déterminer les $k$ entiers (relatifs) tels que $41x = \pi/4 + k\pi$ et que $x$ soit dans l'intervalle donné). La fonction «partie entière» de $X$, notée $E(X)$ ou $\lfloor X \rfloor$ permet aisément de résoudre ce type de problèmes ; elle est définie comme le plus grand entier (relatif) $\leq X$ ; son graphe et ses propriétés seront vus en classe, et étudiés plus précisément au chapitre 9. La partie fractionnaire $\mathrm{Frac}(X) = X - E(X)$ est une autre fonction arithmétique du même genre ; elle est 1-périodique.

# 1 Suites d'objets.

## 1.1 Les notations.

On vient de voir un exemple où on est amené à effectuer une suite d'opérations répétitives ; il arrive également qu'on veuille définir une suite d'objets (chaque objet dépendant par exemple du précédent) ; dans tous les cas de ce genre, la $n^{\text{ème}}$ valeur (ou le $n^{\text{ème}}$ objet) est notée par une notation indicée telle que $x_n$ (la $n^{\text{ème}}$ valeur prise par $x$), $P_n(x)$ (le $n^{\text{ème}}$ polynôme), etc... On notera que $n$ est une véritable variable (mais ne prenant que des valeurs entières) ; et on convient (bien qu'il puisse y avoir quelques exceptions)

a) que $n = 0$ est possible (et donc une suite «commence au zéro$^{\text{ème}}$ objet» !) ;

b) qu'à chaque valeur de $n$ correspond un objet (il n'y a pas de «valeurs interdites» pour $n$, en d'autres termes le domaine de validité (pour $n$) est $\mathbf{N}$ tout entier)

c) que si on appelle $S$ une suite, ses «valeurs» (les termes de $S$) sont notées $S_0, S_1, \ldots$ et on utilise une notation de mise entre parenthèses des valeurs : $S = (S_0, S_1, S_2, \ldots)$ ou encore $S = (S_n)$ (éventuellement en précisant en indice les valeurs de $n$ dans les cas exceptionnels tels que $S = (S_n)_{n>0}$).

Ainsi, soit $P$ la suite des nombres premiers. On a donc $P_0 = 2$ ; $P_5 = 13$ ; et on s'exercera par exemple à traduire en français la «définition» suivante : $(P_n; P_{n+1})$ est un couple de nombres premiers *jumeaux* si $P_{n+1} - P_n = 2$.

## 1.2 Comment définir une suite.

Les suites les plus simples sont définies par une formule telle que $x_n = \dfrac{\cos n}{n^2 + 1}$. En effet, même si la formule est très compliquée, il n'en reste pas moins qu'on peut accéder à la valeur de n'importe quel terme sans calculer les autres : on dit qu'une telle suite est définie par une formule *explicite* (dont le domaine de définition doit être $\mathbf{N}$, ou à la rigueur $\mathbf{N}^*$) ; bien que ces suites «ressemblent» à des fonctions numériques, on se gardera toutefois de croire qu'un prolongement (intéressant) à $\mathbf{R}$ existe toujours, comme on le verra plus loin pour la suite $(n!)$.

Mais le plus souvent, on rencontre des suites définies de proche en proche, c'est-à-dire que chaque terme dépend des précédents (le terme technique est «définies par récurrence»); telles que, par exemple,

— les suites «définies par *itération* d'une fonction $f$» : $u_{n+1} = f(u_n)$, par exemple la suite $s = (0; 1; 1,4142\ldots; 1,5537\ldots; \cdots)$ définie par $s_{n+1} = \sqrt{1+s_n}$ (c'est le type de suite le plus souvent utilisé en Analyse);

— les suites où chaque terme est obtenu en «combinant» les termes précédents, telle la suite de Fibonacci $F = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ (c'est ce genre de suite qui rend nécessaire une notation précise, car il n'est peut-être pas toujours évident de deviner le sens des $\ldots$), définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$;

et des suites bien plus «irrégulières» telle la suite $P$ des nombres premiers : pour calculer $P_{1000}$, par exemple, il faut entre autre calculer tous les nombres premiers précédents, et aucune formule explicite évitant ce travail n'a jamais été trouvée! Dans de tels cas, on est déjà heureux de découvrir des formules approchées; Gauss avait conjecturé que $P_n \simeq n \ln n$, ce qui ne fut démontré rigoureusement qu'un siècle plus tard!

# 2 Sommations.

## 2.1 Notations et manipulations élémentaires.

On est souvent amené à effectuer des opérations sur tout un groupe de nombres (ou d'objets), les plus fréquentes étant la somme et le produit des éléments du groupe. Des notations particulières ont donc été développées dans ce but; si les objets s'appellent par exemple $a_0, a_1, \ldots, a_n$, leur somme $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ sera notée $\sum_{i=0}^{n} a_i$, ce qui se lit : «somme de $i = 0$ à $n$ de $a_i$»; une notation analogue existe aussi pour les produits : $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$ se note $\prod_{i=0}^{n} a_i$ (et se lit «produit de $i = 0$ à $n$ de $a_i$»).

On peut obtenir aisément des formules de transformation de ces expressions qui ne font que «coder» l'associativité de l'addition, par exemple; on retiendra :

$$\sum_{i=0}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$$

(Cette dernière formule signifiant simplement qu'on peut ajouter les termes en partant du dernier!)

De manière un peu plus délicate, on examinera avec attention la façon de «décaler» une suite : le changement de variable $I = i + 1$ conduit (la technique sera précisée en cours) à

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} \ ;$$

l'un des points-clés de la méthode est le fait que $i$ n'est dans toutes ces notations qu'une variable «muette», c'est-à-dire que l'expression finale «ne contient pas $i$», et par conséquent qu'on a :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j \quad \text{(par exemple)}$$

On peut aussi traduire la formule classique de distributivité par :

$$k\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} ka_i$$

mais l'expression du produit de deux sommes nécessite une notation plus générale, que l'on verra en **3. 3**.

### 2. 2 Progressions arithmétiques et géométriques.

Un exemple important de l'utilisation de ces notations et de ces formules est le calcul des sommes (finies) de termes d'une suite arithmétique : si $a_i = a_0 + ki$ (c'est-à-dire que $a_n$ est une suite arithmétique (de premier terme $a_0$ et de raison $k$)), on peut écrire $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} = S$, donc $2S = \sum_{i=0}^{n}(a_i + a_{n-i})$, et comme $a_i + a_{n-i} = 2a_0 + ki + k(n-i) = 2a_0 + kn$, on voit que $S = (\sum_{i=0}^{n} 2a_0 + kn)/2$; comme tous ces termes sont égaux, et qu'il y en a $n+1$, on obtient $S = (n+1)(2a_0 + kn)/2$ ou encore $S = (n+1)(a_0 + a_n)/2$.

De même, on peut obtenir «rigoureusement» la démonstration de l'identité des suites géométriques du chapitre 3 : posant $S = \sum_{i=0}^{n} x^i$, on voit que $xS = \sum_{i=0}^{n} x^{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i$, et donc que $(x-1)S = x^{n+1} - 1$ (en remarquant que tous les termes sont nuls sauf ceux des bornes). On verra dans l'exercice-type n° 7 qu'une méthode analogue permet par exemple de calculer $\sum_{i=0}^{n} ix^i$.

## 3 Dénombrements, formule du binôme.

Un problème de dénombrement consiste à déterminer, dans un ensemble formé d'un (grand) nombre d'éléments, le nombre de ceux possèdant une certaine propriété (le nombre d'éléments d'un ensemble $A$ s'appelle son *cardinal*, et se note $|A|$, $\mathrm{Card}(A)$ ou $\#A$). Par exemple, dans le cadre des calculs de probabilités que nous verrons au chapitre 16, un joueur peut se demander combien on peut écrire de grilles de loto (en cochant 6 numéros parmi 49) et, de toutes ces grilles, combien correspondent à avoir 4 numéros gagnants (sur 6) au moins; avec les notations que nous allons voir, ces nombres valent respectivement $\binom{49}{6} \simeq 1{,}4\,10^7$ et $\binom{6}{4}\binom{43}{2} + 43\binom{6}{5} + 1 = 13\,804$. Un certain nombre de problèmes simples de ce type se résolvent à l'aide de «formules» faciles à retrouver (mais qu'il vaut mieux connaître par cœur) et qui font l'objet des paragraphes suivants; des cas plus complexes seront vus en exercice, puis au chapitre 16.

### 3.1 Choix indépendants ; arbres.

Si on peut modéliser le problème par une série de choix successifs indépendants, le nombre de solutions est essentiellement le produit des possibilités à chaque étape. Ainsi, soit à déterminer le nombre de plaques d'immatriculation du modèle 1931 AQ 37, où les chiffres sont quelconques (0 compris) et les lettres prises parmi 24 (O et I exclus) ; le nombre de ces plaques sera donc $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 24 \times 24 \times 10 \times 10 = 10^6 \times 24^2 = 576\,000\,000$. On représente souvent ce genre de situation par des arbres, ce qui est encore plus intéressant lorsque les choix sont dépendants, comme on le verra ci-dessous. Il faut donc retenir en particulier que l'ensemble des suites de $n$ symboles (distincts ou non, l'ordre comptant) pris dans un «alphabet» formé de $p$ symboles est $p^n$. En notant (en binaire) l'appartenance à un sous-ensemble par un 1 et la non appartenance par un 0, les sous-ensembles d'un ensemble à $n$ éléments sont représentés par une suite de 0 ou de 1 ; on en déduit que le nombre de ces sous-ensembles est $2^n$.

### 3.2 Ordres d'une suite d'objets ; factorielles.

Les différentes façons d'ordonner une suite de $n$ objets (par exemple, pour 3 lettres $A$, $B$ et $C$, les 6 classements $A > B > C$, $A > C > B$, $B > A > C$, $B > C > A$, $C > A > B$ et $C > B > A$) s'organisent comme une suite de choix dépendants : il y a $n$ façons de choisir le premier objet, $n - 1$ façons de choisir le second, etc. Le nombre total de ces ordres (qu'on appelle des *permutations*) est donc le produit des $n$ premiers entiers consécutifs : $1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{i=1}^{n} i$. Ces nombres (la suite $(1, 2, 6, 24, 120, 720, \ldots)$) apparaissent si souvent en mathématiques qu'on a défini une notation abrégée : $\prod_{i=1}^{n} i$ est noté $n!$, ce qui se lit factorielle (de) $n$. Dans les écritures qui l'utilisent, le calcul de la fonction «factorielle» a priorité ; on s'en rappelera mieux en imaginant qu'il s'agit en fait d'une sorte d'exponentiation, et qu'on aurait donc pu l'écrire $n^!$. Ainsi, on a donc la relation $(n+1)! = (n+1)n!$ ; en utilisant cette formule, on peut (conventionnellement) prolonger la notation à $0! = 1$ (mais il n'est pas possible de la prolonger à $\mathbf{Z}$).

La fonction «factorielle» a une croissance très rapide : on a $5! = 120$, $8! = 40320$, $20! \simeq 2.43\ 10^{18} \ldots$ ; une formule (due à Stirling) permet d'en connaître des valeurs approchées quand $n$ est grand : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ (le sens exact de $\sim$ sera vu au chapitre 11, et une démonstration de la formule sera donnée au chapitre 13) ; cette approximation intervient de manière importante en pratique dans certains calculs de probabilités mettant en jeu de grandes valeurs de $n!$.

D'autres produits d'entiers peuvent s'exprimer à l'aide de factorielles : on a par exemple $k(k+1)(k+2)\cdots(n-1)n = n!/(k-1)!$ ; on verra en classe (la méthode est rappelée dans l'exercice-type n° 17, où elle intervient pour simplifier l'écriture d'une dérivée) comment transformer le produit $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2k-1)$ pour obtenir $(2k)!/2^k k!$.

### 3.3 Arrangements et combinaisons.

Le raisonnement précédent sur les ordres se généralise aux suites de $k$ symboles (pris parmi $n$) où l'on veut que les symboles soit distincts, mais où l'ordre compte : il y a $n$ possibilités pour le premier symbole, $n - 1$ pour le second, et $n - k + 1$ pour le $k$-ème. Ce nombre, $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$, peut, comme on vient de le voir, s'exprimer à l'aide de factorielles : il vaut $n!/(n-k)!$. On l'appelle le nombre d'arrangements de $k$ objets parmi $n$ (il était jadis noté $A_n^k$, mais cette notation n'est plus au programme).

Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments. Le nombre de ses «parties» (de ses sous-ensembles) ayant $p$ éléments est donné par l'importante formule $\frac{n!}{p!(n-p)!}$, nombre que l'on note $\binom{n}{p}$ (l'ancienne notation $\mathsf{C}_n^p$ n'est plus employée). La démonstration de ce résultat sera faite en classe (elle consiste à considérer comme équivalent deux arrangements ne différant que par l'ordre).

Il est inversement possible d'utilser des raisonnements combinatoires pour démontrer des relations plus ou moins inattendues entre tous ces nombres; on verra ainsi comment obtenir l'importante relation $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$, d'où on déduit le calcul des $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal.

### 3. 4 La formule du binôme.

Analysant la façon dont s'obtiennent les coefficients des identités remarquables $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, etc…, on montre qu'ils découlent d'un dénombrement (celui des termes de la forme *aababb...ab* avec $k$ lettres $a$ et $n-k$ lettres $b$); on en déduit la formule du binôme (ou formule de Newton) :

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

(une démonstration rigoureuse nécessiterait peut-être un raisonnement par récurrence, d'ailleurs assez technique).

Les coefficients $\binom{n}{k}$ intervenant dans cette formule, c'est la raison pour laquelle on les appelle également coefficients du binôme, ou coefficients binomiaux.

En pratique, si $n$ est inférieur à 10, on a intérêt à utiliser directement le triangle de Pascal; la formule de Newton ne s'emploie sous cette forme que pour $n$ «quelconque» (on verra d'ailleurs au chapitre 11 que Newton l'a généralisée encore à des valeurs $n$ non entières).

### 3. 5 Applications.

La formule du binôme se généralise d'abord à d'autres identités analogues :

$$(a-b)^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-i}b^i;$$

d'autre part, en prenant des valeurs particulières pour $a$ et $b$, on obtient des relations intéressantes entre les $\binom{n}{i}$, ainsi la somme des coefficients binomiaux vaut $2^n$ (en prenant $a=b=1$) (résultat qui admet une interprétation combinatoire simple) et leur différence alternée ($\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}$) est nulle (en prenant $a=1$, $b=-1$). Enfin, l'identité du binôme est valable même dans les complexes[†]; ce qui permet (en prenant par exemple $a=1$ et $b=i$) d'obtenir des formules moins évidentes, telles que $\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots+(-1)^{n/2}\binom{n}{n}=2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$.

[†] On verra au chapitre 18 qu'on peut même la généraliser encore, par exemple aux matrices lorsqu'elles commutent.

# 4 Le raisonnement par récurrence.

## 4.1 Cas élémentaires.

Pour de nombreuses suites d'objets, il est difficile de prouver directement une propriété générale, parce qu'on ne connait pas de formule explicite pour le $n^{\text{ème}}$ terme. Si l'on dispose d'une méthode de construction d'un terme à partir des précédents, il est toutefois possible de démontrer la propriété cherchée «de proche en proche» en la vérifiant d'abord pour les termes initiaux, et en montrant ensuite qu'elle est «héréditaire», c'est-à-dire que la méthode de construction garantit qu'elle est vraie d'un terme quand elle est vraie des précédents. On a vu au chapitre 1 qu'une telle démonstration s'appelait une démonstration *par récurrence*; cette méthode, comme on l'a dit, ne s'applique pas seulement aux suites, mais à toute propriété des entiers pour laquelle on pense avoir une relation entre la vérité pour un $n$ donné et celle pour le suivant $(n+1)$; la formulation rigoureuse et un exemple typique (mais, volontairement, ne portant pas explicitement sur une suite, quoiqu'il serait aisé de le rédiger dans ces termes) sont donnés dans l'encadré suivant :

**Pour démontrer par récurrence une propriété $\mathcal{P}(n)$**

1) Annoncer le projet («on va démontrer par récurrence que ... »).

2) Vérifier que la propriété est vraie pour 0 («$\mathcal{P}(0)$ est vraie car... »).

3) Montrer que si $\mathcal{P}$ est vraie pour $k$, elle est encore vraie pour $k+1$ : c'est en principe la partie délicate du raisonnement, et elle se présente sous la forme : «Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie (pour un certain $k$ fixé) (ce qu'on appelle l'hypothèse de récurrence), alors ......, ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$» (ou «...ce qui équivaut à $\mathcal{P}(k+1)$»).

4) Conclure : «par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n$».

Un exemple

Montrons (par récurrence) que $(1+a)^n \geq 1+na$ ($a$ réel $> -1$, $n$ entier.)

1) L'inégalité est (évidemment) vraie pour $n=0$, puisque $(1+a)^0 = 1 = 1+0.a$.

2) Supposons qu'elle soit vraie pour $n=k$, c'est-à-dire (hypothèse de récurrence) que $(1+a)^k \geq 1+ka$; on aura alors $(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka) = 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$, ce qui est bien l'inégalité pour $n=k+1$.

3) Par récurrence, l'inégalité est donc vraie pour tout $n$.

## 4.2 Applications, récurrences «généralisées».

Comme on l'a dit, la partie délicate est le passage de $k$ à $k+1$, et en général, ce mode de démonstration ne doit être envisagé que si une démonstration directe semble impossible, ce qui correspond surtout au cas où les objets étudiés sont eux-mêmes définis par récurrence. Ainsi, par exemple, montrer qu'une suite est croissante revient à prouver que (pour tout $n$) $u_n < u_{n+1}$ ; si $u_{n+1}$ est fonction de $u_n$, on est tenté d'étudier cette fonction (pour démontrer que $f(x) > x$). Mais il sera souvent plus simple de bâtir un raisonnement par récurrence du type : «$u_0 < u_1$ ; $f$ étant croissante, si $u_k < u_{k+1}$, alors $f(u_k) < f(u_{k+1})$, c'est-à-dire que $u_{k+1} < u_{k+2}$, donc...»

On doit parfois modifier un peu le modèle de raisonnement qu'on vient de voir. Tout d'abord, certaines propriétés ne sont vraies «qu'à partir d'un certain rang», c'est-à-dire pour $n \geq n_0$. On adapte alors la première étape en disant : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (puisque ...), et on conclut par : donc, par récurrence à partir de $n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Dans d'autres cas, et tout particulièrement pour des suites définies par récurrence à partir de plusieurs termes (par exemple la suite de Fibonacci), on devra adopter comme «hypothèse de récurrence» : supposons que la propriété soit vraie pour tous les $i \leq k$... ; on parle alors de récurrence *cumulative*. Un exemple (un peu artificiel) est analysé dans l'exercice-type n° 9, et on trouvera un tableau-résumé des différents modèles de récurrence, accompagnés de quelques exemples plus «naturels», à la fin de la fiche d'exercice-type n° 18.

---

# Exercices

## 1 Suites (notations).

**1** ($\star$) Soit $(u_n)$ une suite; décrire en français les deux suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$

**2** ($\star\star$) Les phrases suivantes définissent-elles des suites ?

«$u_n$ est le $n^{\text{ème}}$ nombre premier»

«$v_n$ est la $n^{\text{ème}}$ décimale de $\pi$»

«$w = (3, 7, 31, 127, 2047, \ldots)$ est la suite des nombres premiers de la forme $2^k - 1$»

**3** ($\star\star$) Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ ; calculer les dix premiers termes de $(u_n)$, proposer une conjecture sur le sens de variation de $u$, et la noter à l'aide des suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$

## 2 Sommations.

**4** ($\star$) Rédiger, en utilisant la notation $\sum$, le calcul de $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$

**5** ($\star$) Soit $(u_n)$ une suite; $v$ la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ ; calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

Les deux exercices-types 8 et 9 (dans le prochain paragraphe) sont assez similaires; on pourra donc, à la rigueur, n'en étudier soigneusement (c'est-à-dire en respectant le «mode d'emploi») que l'un des deux...

**T 8** On veut déterminer une formule explicite pour $S = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Calculer (par décalage) $(x^2-2x+1)S$ ; en déduire la valeur de $S$. Que se passe-t-il dans le cas $x = 1$ ? Montrer qu'on pouvait obtenir (plus simplement !) ce résultat en considérant $S$ comme un polynôme et en en cherchant une primitive.

**6** ($\star\star$) Calculer (sous forme explicite) $S = \sum_{\substack{0\leq i\leq m\\ 0\leq j\leq n}} a^i b^j$ ; on pourra d'abord montrer que $S = \left(\sum_{i=0}^{m} a^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b^j\right)$.

**7** ($\star\star\star$) Calculer (en utilisant éventuellement le résultat de l'exercice précédent)

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n} a^i b^j$$

**8** ($\star\star\star\star$) Calculer $S = \sum_{0\leq i,j\leq n} ij$, puis montrer qu'en posant $T = \sum_{0\leq i<j\leq n} ij$, on obtient $S = 2T + \sum_{i=0}^{n} i^2$. Calculer directement $T$, et en déduire que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2$.

## 3 Coefficients binomiaux.

**9** ($\star$) Que vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ ?

**10** ($\star\star$) Déterminer $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ (on pourra commencer par développer $(1-1)^{2n}$)

**T 9** Montrer par récurrence que $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ (on pourra utiliser la relation entre les $\binom{n}{k}$ correspondant à la construction du triangle de Pascal). Montrer qu'on pouvait obtenir directement cette formule en utilisant la dérivée du polynôme $(1+x)^n$.

**11** ($\star\star\star\star$) Montrer que si $p$ est premier, $p$ divise tous les $\binom{p}{k}$, pour $k$ compris entre 1 et $p-1$. Étudiant l'ensemble des diviseurs de $(p-1)!$, montrer que si $p$ ne divise pas $(p-1)!$ , $p$ est premier ou $p = 4$; par un raisonnement analogue, montrer enfin que si $p$ divise tous les $\binom{p}{k}$, pour $k$ compris entre 1 et $p-1$, $p$ est premier.

## 4 Raisonnement par récurrence.

**12** ($\star$) Montrer que (pour tout $n$) $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

**13** ($\star$) Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1+2u_n)$ est croissante. Etudier de même $v_0 = 1$ ; $v_{n+1} = \ln(1+v_n)$

**T 10** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et (pour tout $n \geq 1$) $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Déterminer $u_n$ en fonction de $n$.

**14** ($\star\star\star$) Soit $F$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n$. Montrer (par récurrence) les propriétés suivantes :

a) $F_n < 2^n$

b) $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} \pm 1$ (commencer par préciser le signe en fonction de $n$)

c) $F_{3n}$ est pair et $F_{5n}$ est divisible par 5

**15** ($\star\star$) Le texte suivant contient (il faut l'espérer) une erreur de raisonnement. De plus, la présentation n'en est pas tout à fait rigoureuse. Le réécrire, et diagnostiquer l'erreur :

«**Théorème.** *Pour tout réel $a > 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a $a^{n-1} = 1$*

Démonstration : c'est évidemment vrai pour $n = 1$. Supposons que ce le soit pour 1, 2, 3, …, $k$. On aura alors

$$1 = \frac{1 \times 1}{1} = \frac{a^{k-1}a^{k-1}}{a^{k-2}} = \frac{a^{2k-2}}{a^{k-2}} = a^k = a^{(k+1)-1};$$

le théorème est encore vrai pour $k+1$ ; par récurrence, il est donc toujours vrai.»

**16** ($\star\star$) Et que penser du texte suivant ?

«**Théorème.** *Si un ensemble fini d'entiers contient un entier pair, tous les entiers de l'ensemble sont pairs*

Démonstration : Raisonnons par récurrence sur le nombre d'éléments $n$ de l'ensemble. Le théorème est évidemment vrai si $n = 1$. Supposons qu'il soit vrai pour tous les ensembles contenant $k$ entiers. Soit alors $E$ un ensemble de $k+1$ entiers, contenant un entier pair $a$. Retirons un entier $b \neq a$ de l'ensemble, nous obtenons un sous-ensemble $S$ de $k$ entiers contenant $a$, qui d'après l'hypothèse de récurrence est formé d'entiers tous pairs. Remplaçons alors dans cet ensemble $a$ par $b$, nous obtenons un nouvel ensemble $S'$ de $k$ entiers contenant un entier pair (l'un des $k-1$ entiers non remplacés) ; tous les entiers de $S'$ sont donc pairs, ce qui prouve que $b$ est pair ; et comme $E = S \cup \{b\}$, $E$ ne contient que des entiers pairs ; ce qui, par récurrence, achève la démonstration.»

# 7. TECHNIQUES COMBINATOIRES

Plan

**1 Suites d'objets.** ........ p. 2

**1.1** Les notations.

**1.2** Comment définir une suite.

**2 Sommations.** ........ p. 3

**2.1** Notations et manipulations élémentaires.

**2.2** Progressions arithmétiques et géométriques.

**3 Dénombrements, formule du binôme.** ........ p. 4

**3.1** Choix indépendants; arbres.

**3.2** Ordres d'une suite d'objets; factorielles.

**3.3** Arrangements et combinaisons.

**3.4** La formule du binôme.

**3.5** Applications.

**4 Le raisonnement par récurrence.** ........ p. 7

**4.1** Cas élémentaires.

**4.2** Applications, récurrences «généralisées».

Exercices ........ p. 8