9. LIMITES ET CONTINUITÉ

1 Limites.

1.1 Un exemple non évident.

Historiquement, la notion de limite est d'abord apparue en étudiant le comportement des suites numériques (on a déjà vu au chapitre 7 qu'une suite définie par récurrence peut se «rapprocher» de façon évidente d'un nombre qu'on ne parvient pourtant pas forcément à déterminer). Mais en fait, la notion la plus riche est celle de limite de fonction (on verra en **3. 4** comment les suites en sont un cas particulier); la nécessité d'une définition rigoureuse apparait dès qu'on examine un exemple non évident, car alors la rigueur demande des preuves, impossibles à fournir avec une image «intuitive» mal définie. Ainsi, la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\sin^\circ x}{x}$ (sinus de x «mesuré en degrés») n'est pas définie pour 0; des essais à la calculatrice «près de 0» donnent par exemple $f(1) \simeq 0,0174524$; $f(0,1) \simeq 0,01745328$; $f(10^{-4}) \simeq 0,0174532925$.

Ces valeurs semblent se rapprocher d'une valeur «limite»; une analyse soignée utilisant le théorème de la borne supérieure montre d'ailleurs qu'il suffit de prouver «f décroissante», comme on le verra en **3. 8**. Néanmoins, le «nombre limite» n'apparait pas clairement (il sera calculé en **2. 8**), et du fait même que $f(0)$ n'existe pas, il doit être déterminé de manière indirecte; on dit que ce nombre (si on parvient à en prouver l'existence) est la limite de f (quand x tend vers 0). Le but des paragraphes suivants est de donner une définition rigoureuse de cette notion; on va la construire progressivement, en partant de cas évidents et en généralisant; la formulation complète (ce qu'on appelle la «définition de Cauchy») se trouve en **3. 1**.

1.2 Limite en 0.

Et tout d'abord, on se restreint au cas où x «tend vers 0»; concrètement, cela veut dire qu'on s'intéresse aux valeurs prises par f quand x devient de plus en plus petit (il faudra sans doute utiliser la «taille» de x, autrement dit $|x|$); dire que $f(x)$ «se rapproche» de L, c'est dire que $(f(x)-L)$ «se rapproche de 0». Il suffit donc d'étudier cette dernière notion; nous dirons alors que f est de limite nulle en 0, ce que nous noterons $\lim\limits_0 f = 0$ (ou encore $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$).

1.3 Limites «évidentes».

Le plus évident c'est qu'on doit avoir $\lim\limits_0 \mathrm{Id}_{\mathbf{R}} = 0$, car $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(x) = x\dots$ Partant de l'image des «tailles» se rapprochant de 0, on voit qu'on peut prendre pour première règle que si $|g(x)| < |f(x)|$ (c'est-à-dire que g est «plus petit» que f) et si $\lim\limits_0 f = 0$, alors $\lim\limits_0 g = 0$. Ainsi, comme on a (pour $|x| < 1$) les inégalités $|x^n| < \dots < |x^3| < x^2 < |x|$, on a (pour tout $n > 0$) $\lim\limits_0 x^n = 0$.

On voit qu'on ne s'est intéressé qu'à x «assez petit» (ici, à $-1 < x < 1$), en effet, comme on étudie le comportement de $f(x)$ quand x est «très petit», les valeurs de x (et donc de $f(x)$) extérieures à un «voisinage de 0», c'est-à-dire à un intervalle de la forme $]-a;a[$, n'entrent pas en ligne de compte; on aboutit ainsi, en généralisant les inégalités précédentes, à la «définition de Cauchy» : f a pour limite 0 quand x tend vers 0 si $f(x)$ peut être rendue plus petite que toute valeur fixée en choisissant x suffisamment petit.

1.4 La définition rigoureuse et son utilisation pour $\sqrt{x}$.

La définition précédente peut être mathématisée en remplaçant la «taille» par des inégalités convenables; on aboutit (la démarche sera effectuée en classe) à la «formule en ε-α» :

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x)(|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

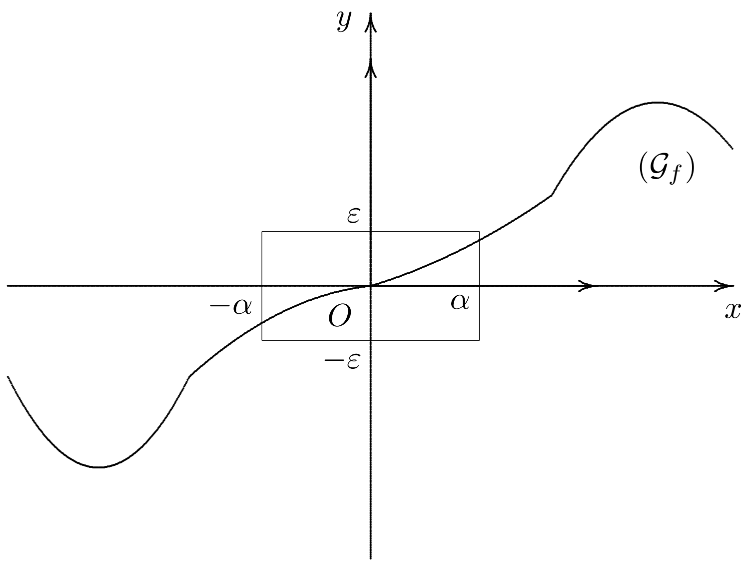
Il est important d'apprendre à «lire» ce genre de formule; on obtient donc ici : «pour tout réel strictement positif ε (si petit soit-il), il existe un réel strictement positif α tel que pour tout x dans l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$, l'image $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$». Son application sur l'exemple $f(x) = \sqrt{x}$ donne : $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha)(\forall x)(|x| < \alpha \Rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon)$, qui est vraie en prenant $\alpha = \varepsilon^2$ (c'est un bon exercice de rédiger complètement la démonstration); on remarquera : 1) que α dépend de ε; 2) que les problèmes de domaines d'existence ont été escamotés, on les retrouvera en **2. 7**. Nous venons donc de démontrer rigoureusement que : $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$. Il est clair que même pour des cas très simples, une telle démonstration est toujours difficile; en réalité, on ne revient à la définition de Cauchy que dans des cas exceptionnels, ou pour donner des démonstrations rigoureuses de résultats généraux; sinon, on applique les formules et les méthodes qu'on verra plus loin.

1.5 Le cas $|f| < |g|$ (quand $\lim g = 0$).

Avec la définition rigoureuse qu'on vient de voir, on peut prouver «mathématiquement» que si (pour tout x assez petit) $|f(x)| < |g(x)|$ et si $\lim\limits_0 g = 0$, alors $\lim\limits_0 f = 0$: il suffit de prendre pour f le même α que pour g. On obtient ainsi aisément des résultats tels que $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$; des résultats plus généraux seront obtenus en **2**.

1.6 Interprétation graphique.

L'interprétation graphique sera précisée en classe; elle revient essentiellement à montrer que le graphe reste contenu (près de l'origine) dans des rectangles aussi étroits qu'on veut :



On voit sur ce graphique que α n'a pas besoin d'être choisi au mieux, mais seulement tel qu'on soit certain que f reste compris entre $-\varepsilon$ et ε.

2 Calculs de limites.

2.1 Définition de $\lim\limits_0 f = L$.

Comme on l'a dit en **1.2**, on pose (par définition) $\lim\limits_0 f = L$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - L) = 0$. Cette définition semble présupposer que L est connu. Mais en réalité, on peut démontrer (c'est laissé en exercice) qu'il n'y a au plus qu'un nombre L envisageable; on pourra donc appliquer des techniques de calcul de limite, ou même disposer de théorèmes d'existence, sans pouvoir dans certains cas expliciter L.

2.2 Le théorème des gendarmes.

Si f est encadrée par deux fonctions g_1 et g_2 ayant la même limite, on s'attend à ce qu'il en soit de même de f ; c'est le

Théorème des gendarmes :

$$(\forall x)(|x| < a \Rightarrow g_1(x) \le f(x) \le g_2(x)) \text{ et } \lim_0 g_1 = \lim_0 g_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_0 f = \lim_0 g_1$$

La démonstration, un peu technique, repose sur un calcul de α utilisant des ε bien choisis pour g_1 et g_2 ; c'est un exemple classique de démonstration d'un résultat **général** sur les limites.

On verra de nombreux cas d'application du théorème des gendarmes, par exemple la notion de suites adjacentes; en général, c'est l'outil à employer quand une fonction f de forme compliquée peut être «approximée» par des fonctions g plus simples.

2.3 Sommes, produits, quotients.

On peut résumer les résultats essentiels en disant que le calcul des limites est un «prolongement» du calcul des fonctions, c'est-à-dire que $\lim\limits_0(f+g) = \lim\limits_0 f + \lim\limits_0 g$; $\lim\limits_0(fg) = (\lim\limits_0 f)(\lim\limits_0 g)$ et que, sous les réserves de **2.7**, et si $\lim\limits_0 g$ est non nulle, $\lim\limits_0(f/g) = (\lim\limits_0 f)/(\lim\limits_0 g)$. On a évidemment $\lim\limits_0 [x \mapsto a] = a$; ces résultats permettent d'obtenir par composition successives toutes les limites «usuelles» (polynômes, fractions rationnelles, ...) (en y ajoutant le théorème de composition (**3.5**) et les résultats de continuité des fonctions classiques de **4.1**); les véritables difficultés viennent donc du cas où le calcul direct est impossible, c'est ce qu'on appelle les formes indéterminées.

2.4 Les formes indéterminées.

Il y a forme indéterminée quand on ne peut calculer la limite cherchée en se servant uniquement des limites des «composants», parce que justement la nature exacte de ces composants intervient. Ainsi, si $\lim\limits_0 f = 2$ et $\lim\limits_0 g = 3$, $\lim\limits_0 fg^2 = 18$; mais si $\lim\limits_0 f = \lim\limits_0 g = 0$, on ne peut prévoir $\lim(f/g)$, comme le montrent les exemples $f(x) = g(x) = x$; $f(x) = x$ et $g(x) = 3x$, ou $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. On dit que la forme «0/0» est indéterminée.

C'est le seul exemple élémentaire (si on ne prend pas en compte les limites infinies qui seront vues en **3**). Toutefois, en généralisant un peu, on peut obtenir aussi la forme 0^0, liée en fait à $0.(-\infty)$, comme on le verra plus loin.

Quand on rencontre une forme indéterminée, surtout à une étape intermédiaire du calcul d'une limite, il ne faut pas conclure que le calcul est impossible : on peut souvent obtenir autrement la limite cherchée, et les techniques de calcul des prochains paragraphes apprendront à «lever l'indétermination». Mais bien sûr, il y a aussi des situations vraiment sans solution...

2.5 Quand il n'y a pas de limite.

Tout d'abord, une fonction telle que $x \mapsto 1/x$ n'a pas de limite en 0 ; en effet, la définition de $\lim\limits_0 f = L$ montre que f est bornée sur $[-\alpha, \alpha]$ (par $L+\varepsilon$), or $1/x$ n'est pas majorée près de 0. Ce cas sera toutefois traité en **3** : il s'agit d'une limite infinie. Mais l'étude d'une fonction telle que $\sin(1/x)$ fait apparaître une difficulté plus grave : cette fonction est bornée (par -1 et 1), mais elle oscille entre ces deux valeurs au voisinage de 0, passant par -1 et 1 pour $x = 1/(\pi/2+k\pi)$. Une analyse soignée montre qu'aucune limite (même généralisée) n'est possible : elle est exposée dans l'exercice-type n° 15.

$**$ Bien qu'il ne puisse en aucun cas s'agir d'une preuve, l'existence (et parfois la valeur exacte) d'une limite peut le plus souvent être conjecturée par une étude expérimentale : il suffit de prendre des valeurs de $f(x)$ pour x «très petit». On se méfiera cependant : a) des fonctions à variations lentes telles que $\ln x$; b) des erreurs de calcul liées à des différences de quantités voisines : on verra en classe l'exemple de $\dfrac{f(2x)-2f(x)+f(0)}{x^2}$ $**$

2.6 Composition des limites : $\lim g \circ f$ quand $\lim f = 0$.

Si $\lim\limits_0 f = 0$, et si $\lim\limits_0 g = L$, alors $\lim\limits_0 (g \circ f) = L$ (La démonstration sera faite en classe). Une étude attentive de ce résultat montre toutefois qu'il est nécessaire que $g(0)$ existe (et soit égal à L). Les difficultés logiques ainsi soulevées rendent nécessaires les précisions du prochain paragraphe.

2.7 Problèmes liés aux domaines de définition.

Pour permettre au théorème précédent (et à ses analogues) d'être toujours vrai, on précise ainsi la définition de $\lim\limits_0 f = L$:

a) Si $f(0)$ existe, il faut que $f(0) = L$

b) Le domaine d'existence de f doit contenir au moins un intervalle de la forme $]-a; a[$ (un «voisinage de 0») ; 0 étant la seule «valeur interdite» éventuelle (on verra en fait en **3.1** qu'un intervalle de la forme $]0, a[$ suffit pour pouvoir parler de limite à droite).

Ainsi, $\lim\limits_0 \sqrt{x-1}$ n'a pas de sens, et on interdit aussi $\lim\limits_0 1/(\tan^2(1/x)+1)$, ce dernier exemple, non défini en une infinité de valeurs proches de 0 (la suite des valeurs interdites $\{2/(2k+1)\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$), pourrait cependant à la rigueur être traité en prolongeant la fonction par continuité, comme on le verra en **4**.

2.8 Les techniques pratiques de calcul.

Avec la définition de **2.7**, on voit que $\lim\limits_0 f(x) = f(0)$, ou que 0 n'appartient pas à Df, ou que f n'a pas de limite. Dans ce dernier cas, on dit que f n'est pas continue en 0 ; il est alors fréquent que f ait en fait une limite en 0 (différente de $f(0)$) si on restreint f à $\mathbf{R}^*$; on note cette limite $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f$. Heureusement, toutes les fonctions usuelles sont continues : il s'agit des fonctions obtenues par composition des fonctions «élémentaires» (donc données par une «formule»), à l'exception de la fonction $E(x)$ («partie entière de x»). Les fonctions non continues les plus courantes sont obtenues «par intervalles» ; on verra comment les étudier en **4.2**.

La définition de **2. 7** a pour conséquence que si $f(0)$ n'existe pas, et si g est un prolongement de f avec $\lim_0 g = L$, alors $\lim_{x \to 0} f(x) = L$. (On dit alors que g prolonge f par continuité). C'est ainsi qu'on calcule le plus souvent les limites «indéterminées» de la forme «0/0» ; en effet si $f(x) = N(x)/D(x)$, et si (pour anticiper sur les situations de **3. 1**) $N(a) = D(a) = 0$, on peut factoriser $(x - a)$ dans N et D (comme dans le cas des polynômes), on obtient ainsi une fonction «simplifiée», qui peut être définie en a, et qui aura alors pour valeur la limite cherchée.

Les indéterminations de limites contenant des radicaux se ramènent souvent à ce cas en utilisant les quantités conjuguées; on en verra des exemples en exercice.

Les situations plus délicates (quand la «factorisation» ne se fait pas) sont souvent liées aux techniques d'approximation des prochains chapitres (les développements limités, par exemple) ; on retiendra seulement ici la limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (qu'on justifiera en classe en montrant géométriquement l'encadrement $\sin x < x < \tan x$) et les conséquences qu'on peut en tirer.

En définitive, aucun de ces cas pratiques n'oblige donc à revenir à la définition de Cauchy; on peut donc se demander quelle en est la véritable utilité. Outre qu'elle aura, nous l'espérons, commencé à accoutumer le lecteur aux véritables exigences des mathématiciens modernes, et aussi au style dans lequel d'autres définitions, plus complexes, seront introduites en Spé, elle s'impose en fait, comme on l'a dit, dans l'étude de cas vraiment généraux (quand la fonction étudiée n'est connue qu'indirectement, par exemple), et pour démontrer des résultats d'inexistence.

3 Généralisations.

3. 1 Limites en a, limites à droite et à gauche.

Dire que x «se rapproche» de a, c'est dire que $(x - a)$ «se rapproche» de 0; on prend donc pour définition de $\lim_{x \to a} f(x)$ le nombre $\lim_{X \to 0} f(X + a)$; les résultats de base de **2. 2** et **2. 3** se traduisent sans difficulté (c'est laissé en exercice); une «traduction» de la définition (de Cauchy) amène à la «formule» :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x)(|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

L'étude de $\sqrt{x}$ faite en **1. 4** avait négligé le problème du domaine; avec la définition exacte de **2. 7**, on ne peut pas vraiment écrire $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$; on dit qu'il s'agit là d'une limite à droite, parce que la fonction n'est définie qu'à droite de 0 (c'est-à-dire pour $x > 0$); on généralise la définition en notant : $\lim_{x \to a, x > a} f(x) = L$ (limite à droite de f en a) (qu'on abrège souvent par $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$) et en remplaçant dans la formule précédente $|x - a| < \alpha$ par $0 < x - a < \alpha$.

On peut (exercice) considérer la fonction g définie par intervalles par $g(x) = f(x)$ si $x > a$, et $g(x) = L$ sinon; on montrera que g est continue en a si et seulement si f a L pour limite à droite en a.

On définit de même la limite à gauche de f en a, correspondant à $x < a$ (et notée aussi $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$); c'est aussi (par changement de variable) la limite à droite de $f(-x)$ en $-a$. * Remarque : Les abréviations $\lim_{a^+} f$ et $\lim_{a^-} f$ sont déconseillées (principalement parce qu'elles ne respectent pas le théorème de composition des limites de **3. 5**) *

En dehors de fonctions définies par intervalles (par exemple $|x|/x$), et des cas de fonctions définies «d'un seul côté» de a (ln, Arccos, ...), les exemples «naturels» de limites distinctes à droite et à gauche sont rares, toutefois un cas classique est $e^{1/x}$ (en 0).

3. 2 Limites «infinies».

Les définitions précédentes interdisent de parler de la limite en 0 de $1/x$. La généralisation $\lim\limits_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$ n'est pas une conséquence naturelle de ce qu'on a déjà vu : il faudrait au moins disposer d'un système de nombres nouveaux. Il est possible de le construire, en partant des «formules» de **3. 3**, et en utilisant des principes analogues à ceux qui ont amené à la construction des nombres complexes au chapitre 4, mais ces nouveaux nombres ne respectent pas les règles de calcul usuelles (par exemple, on n'a plus forcément $a - a = 0$) ; la construction rigoureuse de l'ensemble ainsi obtenu (la *droite numérique achevée*, notée $\overline{\mathbf{R}}$ ou $[-\infty, +\infty]$) est hors-programme, et il est recommandé, en cas de doute, de n'utiliser le symbole $+\infty$ que comme une abréviation (de la phrase «... tend vers plus l'infini... »).

On pose par définition (la traduction «intuitive» sera faite en cours) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff (\forall A)(\exists \alpha > 0)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \to a} -f(x) = +\infty$$

Il est alors facile de démontrer que $\lim\limits_{0^+} 1/x = +\infty$... La notion de limite infinie est liée à celle de fonction majorée : il est clair que si f est majorée par M au voisinage de 0, on ne peut pas avoir $\lim\limits_{0} f = +\infty$; mais la réciproque n'est pas vraie : on étudiera l'exemple de $|(1/x)\sin(1/x)|$ (mais dans ce dernier cas, on peut montrer que f n'admet alors aucune limite).

3. 3 «Calculs» avec l'infini.

Par analogie avec les calculs de **2. 3**, il est tentant d'écrire des égalités telles par exemple que $\lim(f + g) = \lim f + \lim g = +\infty - 3 = +\infty$; pour pouvoir le faire, il faut donc prolonger les opérations usuelles à $\overline{\mathbf{R}}$, mais cela n'est malheureusement pas toujours possible, puisqu'on veut (comme l'exemple ci-dessus le rappelle) pouvoir avoir $+\infty + a = +\infty$, ce qui interdit le calcul de $+\infty - (+\infty)$... On peut cependant retenir que (pour tout réel a) on a

A) Règles de calcul

$+\infty + a = +\infty + \infty = +\infty$; $-\infty + a = -\infty - \infty = -\infty$

$-(+\infty) = -\infty; -(-\infty) = +\infty$

Si $a > 0$, $a.(+\infty) = +\infty$ (et $a.(-\infty) = -\infty$)

Si $a < 0$, $a.(+\infty) = -\infty$ (et $a.(-\infty) = +\infty$)

$\dfrac{a}{+\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0$

(et, sous toutes réserves, si a non nul, $|a/0| = +\infty$, ce qui sera commenté en classe)

$**$ Les «règles» du type $e^{-\infty} = 0$; $\ln 0 = -\infty$; Arctg$+\infty = \pi/2$ ...sont vivement déconseillées $**$

Les autres «calculs» envisageables ne sont pas définis (on dit qu'il s'agit de «formes indéterminées») :

B) Formes indéterminées

$(+\infty) - (+\infty)$; $(+\infty) + (-\infty)$

$0.(+\infty)$; $0.(-\infty)$

∞/∞, et bien sûr $0/0$

** Par définition, $f^g = e^{g \ln f}$; on en déduit les "formes indéterminées" supplémentaires: $1^{+\infty}$; $1^{-\infty}$; 0^0; $(+\infty)^0$ **

Remarques :

1) Il reste préférable de savoir rédiger ces règles sous forme de raisonnements (des exemples de rédactions correctes seront vus en classe).
2) Comme expliqué en **2. 4**, les «formes indéterminées» signifient qu'on ne peut pas trouver la limite en restant sous cette forme, mais il n'y a pas là forcément d'impossibilité absolue; il faut tenter de «lever l'indétermination». Les moyens d'y parvenir sont très variés; on en verra quelques exemples en **3. 7**.

3. 4 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$; le cas des suites.

Puisque $\lim\limits_{0^+} 1/x = +\infty$, en «admettant» le principe de composition des limites (voir **3. 5**), on obtient par changement de variable la «définition» : $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(1/x)$.

Une analyse soignée montre son équivalence avec la définition de Cauchy :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists A)(x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

On peut de même définir $\lim\limits_{-\infty} f(x)$ en posant $X = -x$, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists A)(x < A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

En pratique, on utilise les mêmes techniques de calcul qu'au voisinage de a, mais :

1) la notion de «continuité» n'a plus de sens, puisque $f(+\infty)$ ne veut rien dire...
2) on rencontre beaucoup plus souvent des formes indéterminées, d'où la nécessité d'une méthode systématique; elle sera vue en **3. 7**, et précisée au chapitre 10.

On généralise ces définitions au cas des suites, en ne gardant que les valeurs de x entières; on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists N)(n > N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon)$$

(on dit alors que la suite u *converge*, et on note simplement $\lim u = L$, car n ne peut avoir d'autre comportement «intéressant» que de tendre vers l'infini)

Il est enfin possible d'avoir à l'infini des limites elles-mêmes infinies; par analogie avec ce qui précède, la définition de $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ est :

$$(\forall B)(\exists A)(x > A \Rightarrow f(x) > B)$$

Cette dernière définition a pour traduction «intuitive» : «pour x assez grand, $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut»; on s'entraînera à traduire de même toutes les définitions qui précèdent.

3. 5 Le théorème de composition des limites : cas général.

L'énoncé général de ce théorème est : si $f(x)$ a pour limite L quand x tend vers A et que $g(X)$ a pour limite L' quand X tend vers L, alors $(g \circ f)(x)$ a pour limite L' quand x tend vers A.

A, L et L' peuvent être finis ou infinis; mais il faut que les domaines de f, g et $(g \circ f)$ respectent les règles données en **2. 7** : Df doit contenir un voisinage de A; si $f(A)$ existe, alors $f(A) = L$; etc... ; si A est $+\infty$, $f(x)$ doit être défini pour x assez grand ... ; sinon, on pourrait avoir des situations «pathologiques», du type de $\lim\limits_{+\infty} 1/x \sin x$.

Il n'est d'ailleurs essentiellement pas possible de généraliser encore le théorème de composition au cas de limites à gauche, par exemple; en effet, une fonction telle que $\sin x/x$ a pour limite 0 en $+\infty$, mais s'approche de 0 en changeant de signe (une infinité de fois), cela rend difficile l'étude d'une limite telle que $\lim\limits_{+\infty} e^{x/\sin x}$, et explique l'interdiction de la notation $\lim f = a^+$.

L'utilisation pratique de ce théorème (ainsi que sa démonstration) se fait par «changement de variable» : on pose $X = f(x)$ et on dit que $\lim f(x) = L$ signifie que X «tend vers L», et donc que $g(X) = g(f(x))$ a pour limite L'.

3. 6 Interprétations graphiques.

Les interprétations graphiques (qu'on a vu au chapitre 5 pour les fonctions élémentaires) doivent être bien connues; on les obtient en interprétant graphiquement les définitions de Cauchy. Les cas les plus intéressants correspondent aux limites infinies et aux limites à l'infini : asymptotes «verticales» (c'est-à-dire parallèles à l'axe Oy, d'équation $[\![X = a]\!]$) si $\lim\limits_{a} f$ est infinie; asymptotes «horizontales» (c'est-à-dire parallèles à l'axe Ox, d'équation $[\![Y = b]\!]$) si $\lim\limits_{\infty} f = b$; comportement «oblique» si $\lim\limits_{\infty} f = \infty$ (ce dernier cas doit être précisé; le plan d'étude exact a été vu au chapitre précédent, des techniques de calcul plus élaborées seront vues au chapitre 11).

3. 7 Calculs pratiques : fonctions usuelles.

Les difficultés rencontrées dans un calcul de limite de fonction usuelle (combinaison de fonctions «classiques») ne peuvent venir que d'un problème de domaine de définition ou d'une recherche de limite «à l'infini», comme on le verra en **4**. Les limites des fonctions classiques aux bornes étant connues, on voit aisément que tant que des formes indéterminées contenant l'infini n'interviennent pas, on ne peut rencontrer que les deux types «$A/0$» et «$0/0$». Le premier cas est élémentaire : la limite est forcément infinie; il suffit de déterminer le signe de la fonction (au voisinage du point considéré). Mais on a vu que le type «$0/0$» n'est pas simple; quand les recettes de **2. 8** ne suffisent plus, le prochain chapitre montrera qu'on est souvent amené à utiliser les dérivées des fonctions considérées, et qu'il peut même y avoir des cas où seuls des outils plus puissants (les développements limités) donnent la réponse.

Les limites «contenant l'infini» sont plus variées. On a toujours la solution de changements de variable de la forme $X = 1/x$ pour tenter de se ramener «en 0», mais c'est généralement à ne tenter qu'en dernier ressort; il vaut mieux essayer d'abord de déterminer quels sont «les plus grands infinis» intervenants; et tenter de les factoriser. Des exemples typiques seront donnés en classe, un cas particulier bien connu est la règle des «termes de plus haut degré» pour les polynômes et les fractions rationnelles; on se rappellera qu'elle n'est valable qu'à l'infini !

3.8 Comment montrer l'existence d'une limite qu'on ne sait pas calculer.

Tout d'abord, on a (de manière presque évidente) le théorème suivant, mais il n'est applicable que si l'on sait déjà que les limites existent : $f < g$ (au voisinage de a) $\Rightarrow \lim\limits_a f \leq \lim\limits_a g$ (principe de prolongement des inégalités) ; on remarquera que l'inégalité stricte s'est «appauvrie» en passant aux limites !

Rappelons d'autre part que si $f < g$ (au voisinage de a), et si $\lim\limits_a f = +\infty$, alors $\lim\limits_a g = +\infty$ (principe de minoration) ; cette fois, il s'agit bien d'un moyen de montrer que la limite existe, analogue au théorème des gendarmes. Mais certaines situations plus délicates ne permettent que d'établir l'existence d'une limite, comme on l'a dit au début ; on verra ainsi au chapitre 12 comment étudier les limites de suites non définies par des formules explicites, mais il convient déjà de remarquer l'important théorème suivant (auquel il a été fait allusion au chapitre 7) :

Convergence des suites monotones. *Si $u = (u_n)$ est une suite croissante, elle converge si elle est majorée, et alors* $\lim u = \sup(u_n)$ *; elle diverge (vers $+\infty$) si elle n'est pas majorée.*

La démonstration de ce théorème est hors-programme, mais elle n'est pas en fait très difficile, en revenant aux définitions de Cauchy.

Le même principe s'applique d'ailleurs aux fonctions, avec quelques modifications : si f est, par exemple, décroissante sur $]a,b[$, et si f est bornée sur $]a,b[$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \sup_{]a,b[} f$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = \inf_{]a,b[} f$. Ici encore, la démonstration n'est pas très difficile, et on verra en classe son interprétation graphique. Plus encore que pour les suites, ces résultat semblent manquer d'intérêt pratique, mais on verra à la fin du chapitre 13 leurs applications à des fonctions définies de manière si indirecte qu'on ne saurait nullement calculer leurs limites aux bornes, et qu'on est déjà heureux de pouvoir prouver leur existence !

4 Continuité.

4.1 Définitions.

On dit qu'une fonction est *continue en a* (avec $a \in \mathbf{R}$) si : 1) elle est définie en a ; 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe (et vaut donc $f(a)$) ; par «abus de langage», on dit encore que f est continue en un point où elle n'est définie «qu'à droite», par exemple (c'est-à-dire pour $x \geq a$) si la limite à droite de f existe et vaut $f(a)$. Dans ce dernier cas, on parle plus rigoureusement de continuité à droite de f en a ; et plus généralement on dit qu'une fonction est continue à droite en a si la limite à droite vaut $f(a)$, même si f existe aussi «à gauche».

On dit qu'une fonction est continue sur un ensemble I (le plus souvent I est un intervalle) si elle est continue (et donc définie) en tout point de I ; et on dit simplement qu'une fonction est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine d'existence.

Comme on l'a déjà dit, la majorité des fonctions usuelles sont continues : on démontre d'abord (en combinant les résultats sur les calculs de limites de **2. 3**) que les polynômes et les fractions rationnelles sont continues ; ln est continue (car dérivable, comme on le verra plus tard), exp aussi (comme réciproque de fonction continue, comme on le verra en **4. 6**), sin est continue (on le verra en exercice, en n'utilisant que $\lim\limits_{0} \frac{\sin x}{x}$) ; les autres fonctions usuelles s'en déduisent en appliquant le théorème de composition des limites, et le résultat de **4. 6**.

De fait, il est assez difficile de donner des exemples naturels (c'est-à-dire non fabriqués) de fonctions non continues (pourtant, on démontre que les fonctions continues sont un cas tout à fait particulier, et il y a même des fonctions «nulle part continues») ; les exemples les plus évidents sont les fonctions «définies par intervalle», par exemple la fonction signe (x), qui vaut 1 si x est positif, -1 si x est négatif et 0 si x est nul (c'est $|x|/x$ si $x \neq 0$).

4. 2 Prolongements, «raccords».

De façon plus générale, on est souvent amené à «prolonger» une fonction f non définie en a ; il est naturel, si f est continue, de souhaiter que le prolongement le soit aussi, ce qui impose la valeur en a égale à $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f(x)$. On dit que la nouvelle fonction prolonge f (en a) par continuité. Un exemple typique est $f(x) = e^{-1/x^2}$, prolongée en 0 par 0. Calculer la limite d'une fonction, c'est souvent déterminer la valeur d'un prolongement continue de cette fonction (c'est le sens des techniques de «simplification» vues en **2. 8**) ; inversement, on est amené à construire des fonctions continues par «raccord», en ajustant des coefficients pour que les limites à droite et à gauche des «morceaux» coïncident ; on verra des exemples en exercice.

4. 3 Le théorème des valeurs intermédiaires.

La caractéristique la plus intuitive des fonctions continues (sur un intervalle) est d'avoir un graphe qui soit lui aussi continu, c'est-à-dire «en un seul morceau» (le terme mathématique est : «connexe»). La traduction rigoureuse de cette propriété est qu'on ne peut pas «sauter» d'une valeur de f à une autre, autrement dit que si f prend deux valeurs y_1 et y_2, f prend aussi toutes les valeurs de l'intervalle $[y_1 ; y_2]$. La formulation exacte s'appelle le

Théorème des valeurs intermédiaires : *Si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, pour tout y de l'intervalle $[f(a);f(b)]$, il existe (au moins) un x entre a et b tel que $f(x) = y$.*

La démonstration de ce théorème est (curieusement) assez difficile ; le plus simple, pour montrer l'existence de x, est de le construire, ce qui amène à la méthode de *dichotomie* : on coupe l'intervalle $[a;b]$ en moitiés $[a_n ; b_n]$ de plus en plus petites, telles que les valeurs des extrémités ($f(a_n)$ et $f(b_n)$) encadrent y, et ces moitiés s'emboîtent «autour» de x (les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, come on le reverra au chapitre 11) ; la continuité permet alors de prouver que $f(x) = y$. La technique exacte sera précisée en classe, elle donne naissance à un programme (d'ailleurs très simple, et aisément implémentable sur calculette) de «résolution universelle» de toute équation à une inconnue. Les applications pratiques du théorème nécessitent en général qu'on ait prouvé l'unicité de x, ce qui suppose le plus souvent qu'on se limite à un intervalle où f est monotone. Ce n'est pas toujours possible (mais c'est bien sûr le cas pour toutes les fonctions usuelles) ; cette opération de «découpage» en intervalles s'appelle (pour les recherches pratiques de solutions d'équations) la «séparation des racines».

4.4 Études de continuité.

Le «plan général d'étude» vu au chapitre 5 prévoit l'étude de la continuité de la fonction examinée. En général, elle est simplement réglée par la phrase «rituelle» : «f est continue en tant que combinaison de fonctions élémentaires (continues)»; on devra parfois utiliser un théorème général : f est dérivable, f est une primitive de fonction continue, etc... Toutefois, il arrive (le plus souvent parce que f est définie «par intervalles») qu'on soit obligé d'étudier la continuité en certains points, en se livrant alors à un calcul de limite; on verra en exercice, par exemple, le cas de la fonction $xE(1/x)$, prolongée en 0 par $f(0) = 1$.

4.5 Image d'un intervalle.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre que l'image de l'intervalle $[a; b]$ par une fonction continue contient l'intervalle $[f(a); f(b)]$; mais de façon plus générale, l'image de tout intervalle (fermé ou non, borné ou non) par une fonction continue (sur cet intervalle) est un intervalle. La démonstration (nullement évidente) repose sur le théorème de la borne supérieure et sur une méthode de dichotomie; elle sera esquissée en classe (la démonstration complète nécessite une étude fastidieuse de tous les cas possibles); un exemple de démonstration rigoureuse d'un résultat de ce genre est montré dans l'exercice-type n° 16.

Toutes les configurations ou presque sont possibles, la seule restriction étant que le type d'intervalle (ouvert, semi ouvert, ou fermé) est conservé; ainsi, on peut avoir $f(]a; b[) = \mathbf{R}$ (exemple : $\tan x$); $f(\mathbf{R}^-) =]a; b]$ (exemple : e^x), etc.

Une conséquence importante de ce résultat est le «*principe du maximum*» : Toute fonction continue sur un intervalle fermé : 1) est majorée (et minorée) 2) atteint ses bornes (autrement dit, si M est la borne supérieure de f sur $[a; b]$, il existe x (pas forcément unique) entre a et b tel que $f(x) = M$). Une application essentielle de ce principe est le «lemme de Rolle» du prochain chapitre.

4.6 Bijections continues.

Une application simple du théorème des valeurs intermédiaires montre d'abord que si f est continue et bijective sur $[a; b]$, elle y est nécessairement monotone (sinon, en «changeant de sens de variation», elle repasserait une deuxième fois par les mêmes valeurs); on démontrera en classe que sur un intervalle (quelconque) où f est définie (partout), deux des trois conditions suivantes entraînent la troisième :

1) f est continue 2) f est monotone 3) f est bijective (de $[a; b]$ vers $[f(a); f(b)]$)

Ainsi, si f est continue et monotone sur $[a; b]$, f^{-1} existe (sur $[f(a), f(b)]$), et une nouvelle utilisation du résultat précédent montre alors que f^{-1} est aussi continue (et monotone). C'est ce résultat qui nous a permis, au chapitre 5, d'affirmer l'existence des fonctions Arc sin, Arc cos et Arc tg.

Exercices

1 Définitions générales.

1 (⋆⋆) Démontrer **rigoureusement** que $\lim_{x\to 1} 1/x = 1$ en utilisant la définition de Cauchy (autrement dit, on déterminera pour chaque $\varepsilon > 0$ un α convenable).

2 (⋆⋆) Si f est une bijection continue telle que $f(0) = 0$, que pensez-vous du raisonnement suivant : « $\lim_{x\to 0} f^{-1}(x) = 0$, en effet il faut pour chaque $\varepsilon > 0$ déterminer un α tel que $x < \alpha \Rightarrow f^{-1}(x) < \varepsilon$, et il suffit de prendre $\alpha = f(\varepsilon)$.»

> **T 15** Déterminer les solutions de l'équation $\sin(1/x) = 0$ et de $\sin(1/x) = 1$; utilisant alors la définition de Cauchy de $\lim_{x\to 0} \sin(1/x) = \ell$, montrer qu'en prenant $\varepsilon < 1/2$, on aboutirait à une contradiction pour des x convenablement choisis parmi ces solutions; en déduire que la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

2 Calculs de limites.

3 (⋆⋆) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1/x\sqrt{x} - 1/x)/x^{3/2} \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad ; \quad \lim_{x\to -a} \frac{x^m + a^m}{x^n + a^n}$$

4 (⋆⋆) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin(1/x) + x^2 \cos x}{x^2 + |x|^{7/2}} \quad ; \lim_{x\to +\infty} x^{1/\sqrt{x}} \quad ; \lim_{x\to -\infty} x \sin(1/x)$$

5 (⋆⋆⋆) Déterminer (sans utiliser la dérivée)

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{1/n} - a^{1/n}}{x - a}$$

6 (⋆⋆⋆) Justifier la «règle de l'Hopital» pour les polynômes : si $P(a) = Q(a) = 0$, alors $\lim_{x\to a} P(x)/Q(x) = \lim_{x\to a} P'(x)/Q'(x)$. (Commencer par traiter le cas où a est racine simple, puis raisonner par récurrence)

3 Continuité.

7 (⋆⋆) «Théorème du point fixe» : Montrer que si f est une application continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$, il existe (au moins) un x tel que $f(x) = x$

> **T 16** Soit f une application continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, telle que $f(0) = 1$ et que $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer que l'équation $f(x) = 1/2$ admet (au moins) une solution.

8 (⋆⋆⋆) Montrer que si f est continue croissante et que A et $\sup(A)$ sont contenus dans D_f, on a $f(\sup(A)) = \sup f(A)$. Pourquoi ne suffit-il pas que f soit croissante ?

9. LIMITES ET CONTINUITÉ

Plan

9. LIMITES ET CONTINUITÉ

(Formulaire)

1 Définitions de Cauchy.

Limites finies en a

Définition 1. 1. *On dit que f est* **définie au voisinage de** a *si il existe un réel $b > 0$ tel que $(]a-b, a[\cup]a, a+b[) \subset \mathrm{D}_f$.*

Définition 1. 2. *On dit que f* **admet** L **pour limite en** a *(ou que $f(x)$* **tend vers** *L quand x tend vers a) si f est définie au voisinage de a et si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathrm{D}_f)(|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

ce qu'on note $\lim\limits_a f = L$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Remarque : les règles logique de négation des quantificateurs donnent donc : «f n'admet pas L pour limite en a» équivaut à

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists x \in \mathrm{D}_f)(|x-a| < \alpha \text{ et } |f(x) - L| \geq \varepsilon)$$

Limites à droite et à gauche

Définition 1. 3. *f* **admet** L **pour limite en** a **à droite** *si f est définie sur un intervalle de la forme $]a, a+b[$ et si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathrm{D}_f)(0 \leq x-a < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

ce qu'on note $\lim\limits_{a^+} f = L$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = L$.

De même

Définition 1. 4. *f* **admet** L **pour limite en** a **à gauche** *si f est définie sur un intervalle de la forme $]a-b, a[$ et si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathrm{D}_f)(0 \leq a-x < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

ce qu'on note $\lim\limits_{a^-} f = L$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = L$.

Limites infinies, limites à l'infini.

Définition 1. 5. *f* **admet** $+\infty$ **pour limite en** a *si f est définie au voisinage de a et si*

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathrm{D}_f)(|x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

De même

Définition 1. 6. *f* **admet** $+\infty$ **pour limite en** a **à droite** *si f est définie sur un intervalle de la forme $]a, a+b[$ et si*

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathrm{D}_f)(0 \leq x-a < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

Définition 1. 7. *f **admet** $-\infty$ **pour limite en** a si f est définie au voisinage de a et si*

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathrm{D}_f)(|x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$$

Les définitions analogues sont laissées au lecteur; on a de même

Définition 1. 8. *f **admet** L **pour limite en** $+\infty$ si f est définie au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire si D_f contient un intervalle de la forme $]c, +\infty[$) et si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in \mathrm{D}_f)(x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

et enfin (par exemple)

Définition 1. 9. *f **a pour limite** $+\infty$ **en** $+\infty$ si f est définie au voisinage de $+\infty$ et si*

$$(\forall B > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in \mathrm{D}_f)(x > A \Rightarrow f(x) > B).$$

Définition 1. 10. *La suite (u_n) **converge** (vers $L \in \mathbf{R}$) si $\lim u_n = L$, c'est-à-dire si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n)(n > N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon).$$

*Sinon, on dit que la suite (u_n) **diverge**; c'est en particulier le cas si $\lim u_n = +\infty$, c'est-à-dire si*

$$(\forall A > 0)(\exists N)(\forall n)(n > N \Rightarrow u_n > A).$$

2 Calcul de limites.

<u>**Encadrements**</u>

Théorème des gendarmes. *Si (au voisinage de a) on a $f_1 \leq g \leq f_2$ (c'est-à-dire s'il existe $b > 0$ tel que pour tout $x \in (]a-b, a[\cup]a, a+b[)$, on ait $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$) et si $\lim\limits_a f_1 = \lim\limits_a f_2 = L$, on a $\lim\limits_a g = L$.*

Théorème de minoration. *Avec les mêmes hypothèses, et si $\lim\limits_a f_1 = +\infty$, on a $\lim\limits_a g = +\infty$*

Principe de prolongement des inégalités. *Si, au voisinage de a, on a $f_1 < f_2$, et si $\lim\limits_a f_1 = L_1$ et $\lim\limits_a f_2 = L_2$, alors $L_1 \leq L_2$*

<u>**Calculs algébriques**</u>

Il est peut-être plus prudent de ne considérer les «formules» qui suivent (et qui correspondent aux règles de calcul dans $\overline{\mathbf{R}}$) que comme des aides-mémoire; des exemples de rédactions correctes sont données plus loin.

$+\infty + a = +\infty + \infty = +\infty$; $-\infty + a = -\infty - \infty = -\infty$

$-(+\infty) = -\infty; -(-\infty) = +\infty$

Si $a > 0$, $a.(+\infty) = +\infty$ (et $a.(-\infty) = -\infty$)

Si $a < 0$, $a.(+\infty) = -\infty$ (et $a.(-\infty) = +\infty$)

$\dfrac{a}{+\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0$

(et, sous toutes réserves, si a non nul, $|a/0| = +\infty$)

On a de plus le

Théorème de composition des limites. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *et* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, *alors* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$ *(o- a, b et c sont finis ou infinis).*

Les formes suivantes sont **indéterminées**, c'est-à-dire que les opérations corspondantes ne sont pas définies dans $\overline{\mathbf{R}}$:

$(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$; $0.(+\infty)$, $0.(-\infty)$; ∞/∞, et bien sûr $0/0$.

Par définition, $f^g = e^{g \ln f}$; on en déduit les «formes indéterminées» supplémentaires : $1^{+\infty}$; $1^{-\infty}$; 0^0; $(+\infty)^0$

Des règles rigoureuses sont en réalité de la forme :

«$a > 0, a. + \infty = +\infty$» $\longrightarrow$ *Si* $\lim\limits_{b} f = a > 0$, *et si* $\lim\limits_{b} g = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{b} fg = \lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) = +\infty$

«$a \neq 0, |a/0| = +\infty$» $\longrightarrow$ *Si* $\lim\limits_{b} f = a \neq 0$, *et si* $\lim\limits_{b} g = 0$, *alors* $\lim\limits_{b} |f/g| = \lim\limits_{x\to b} |f(x)/g(x)| = +\infty$; *ceci ne suffit pas à déterminer la limite de f/g, dont il faut étudier le signe.*

Et on mentionnera l'apparition d'une forme indéterminée par une phrase telle que : «$\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = +\infty$; *la limite de f/g est donc de la forme indéterminée «$\frac{+\infty}{+\infty}$», et ne peut être obtenue sous cette forme; levons l'indétermination. . . »*

3 Continuité.

Définition 3. 1. *On dit que f est* **continue en** *a ($a \in \mathrm{D}_f$) si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. *$F$ est* **continue** *si elle est continue en tout point de son domaine de définition.*

Définition 3. 2. *f est* **continue à droite** *en a si* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$; *$f$ est* **continue à gauche** *en a si* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$.

Les fonctions construites à partir de fonctions continues par opérations algébriques et composition sont continues; c'est aussi le cas des bijections réciproques de bijections continues, et des primitives de fonctions continues (voir chapitre 12), ce qui permet, de proche en proche, de montrer que toutes les fonctions usuelles sont continues.

Théorème des valeurs intermédiaires. *Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, et si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un x (au moins) de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

Principe du maximum. *Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, le nombre $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ existe, et il existe un x (au moins) de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(x) = M$.*

Image d'un intervalle. *Si f est continue sur l'intervalle I, l'image par f de I ($f(I) = \{y \,/\, \exists x \in I, f(x) = y\}$) est un autre intervalle, du même type (ouvert, semi-ouvert ou fermé) que I.*

Caractérisation des bijections continues. *Si f est une application d'un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) sur $B = \mathrm{Im}(f)$, deux quelconques des trois conditions suivantes impliquent la troisième :*

1) f est continue. 2) f est monotone stricte. 3) f est bijective (de $[a, b]$ vers B).