10. DÉRIVATION

1 Introduction.

1.1 Approximations affines.

On est souvent amené, pour simplifier des calculs où figure une fonction «compliquée», à la remplacer par une fonction affine (de la forme $[x \mapsto Ax + B]$), pour x «assez petit», en minimisant l'erreur commise. On suppose que $f(0)$ existe, il est alors clair que l'on doit avoir $B = f(0)$, ce qui amène à étudier $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$, et à chercher à ce que $f(x) - f(0) - Ax$ soit «négligeable» devant x. Si ce résultat est vrai, on dira que $f(0) + Ax$ est la meilleure approximation affine possible de f (on l'appelle *l'approximation affine tangente en 0 à f*) ; et A est alors appelé le *nombre dérivé de f en 0*, et noté $f'(0)$.

1.2 Calcul de $f'(a)$.

La même étude pour x «proche de a» amène à un changement de variable $X = x - a$, et (le calcul sera fait en classe), on aboutit à la formule (pour $x - a$ «petit»)

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + h(x), \qquad \text{avec} \qquad h(x) \underset{a}{\ll} (x - a)$$

(la notation $\underset{a}{\ll}$, qui se lit «$h(x)$ négligeable par rapport à $x - a$ quand x est proche de a» sera commentée en classe, et définie rigoureusement au prochain chapitre)

On dit que A est le nombre dérivé de f en a (et on le note $f'(a)$) ; l'analyse de la formule précédente montre alors que (si h a bien les propriétés énoncées), on doit avoir

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et donc que cette limite existe et est **finie**. (On remarquera que cette limite est **toujours** une forme indéterminée du type «0/0»).

1.3 Terme d'erreur : la notion de «développement limité».

Supposons réciproquement que le nombre $f'(a)$, donné par la limite précédente, existe. Posant

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a) - (x - a)f'(a)}{x - a},$$

on vérifie que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et que

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + h(x)$$

avec $(*)$ $\quad \lim\limits_{x \to a} \dfrac{h(x)}{x - a} = 0$ (car $h(x) = (x - a)\,\varepsilon(x)$) ; $h(x)$ est l' «erreur» commise en remplaçant f par $f(a) + (x - a)f'(a)$, et on abrégera au prochain chapitre la formule $(*)$ par : «$h(x) = o(x - a)$», aboutissant ainsi à la formule

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a),$$

qu'on appelle un développement limité à l'ordre 1 de f près de a (abrégé en «DL_1 de f»). Le sens «concret» de cette formule sera exploré en classe, et on verra comment obtenir de meilleures approximations (non affines) au prochain chapitre. La fonction «approchée» $x \mapsto g(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$ s'appelle l'approximation affine tangente à f en a (on a donc $f(x) = g(x) + h(x)$).

2 Le point de vue géométrique.

2.1 Taux de variation, sécantes et tangentes.

Si M est un point du graphe de f ($M\colon (x; f(x))$) et que M_0 est le point (d'abscisse a) $M_0\colon (a; f(a))$, la sécante (M_0M), d'équation $[\![(x-a)(Y-f(a)) = (f(x)-f(a))(X-a)]\!]$, a pour coefficient directeur le taux de variation $T(a;x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

On a vu que la limite de ce nombre quand x tend vers a (si elle existe) est $f'(a)$; une analyse «intuitive» du déplacement de la sécante (M_0M) quand M se rapproche de M_0 aboutit à la conclusion que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la droite limite; on **définit** alors celle-ci comme la droite *tangente* (en M_0) au graphe. Cette droite a donc pour équation

$$[\![Y = f'(a)X + f(a) - af'(a)]\!],$$

ce qui est bien l'équation du graphe de la fonction affine tangente trouvée en **1.3**.

Bien entendu, il s'agit là de la tangente passant par un point du graphe. Pour déterminer les tangentes à une courbe passant par un point «extérieur», il faut en général mettre le problème en équation avec le point de contact $(a, f(a))$ comme inconnu, ce qui amène à résoudre une équation telle que $Y_0 = f'(a)X_0 + f(a) - af'(a)$, et à obtenir en général plusieurs solutions pour a

2.2 Points «anormaux» et tangentes «exceptionnelles».

Mais cette définition de la tangente ne coïncide pas tout à fait avec l'intuition usuelle d'une tangente comme droite «touchant» la courbe; il est plus correct de l'interpréter comme la droite «épousant» la courbe au mieux, soit en étudiant sa distance au graphe ($\overline{MP} = f(x) - T(x) = h(x)\,!$), soit plus graphiquement encore par agrandissements de la courbe près de M_0. (On montre que pour des agrandissements «tendant vers l'infini», la courbe se confond «graphiquement» avec la tangente). On voit ainsi que la tangente peut traverser la courbe; c'est même la définition des points d'inflexion.

Cette notion d'agrandissement, et l'exigence que l'approximation g soit une fonction, interdit l'étude directe des tangentes verticales et des demi-tangentes; elles font l'objet du paragraphe suivant.

3 Fonctions non dérivables.

3.1 Tangentes «verticales», points anguleux.

Par définition, f est dérivable en a (on dit aussi «différentiable en a») si le nombre $f'(a)$ existe (c'est-à-dire si la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie). Si f n'est pas dérivable en a, c'est donc que l'on est dans l'un des cas suivants :

— 1) $f(a)$ n'existe pas, ou f n'est pas continue en a (voir plus bas) : cette situation exclut totalement l'idée même d'une tangente.

— 2) La limite n'est définie que d'un «côté» de a (par exemple $[x \mapsto x\sqrt{x}]$), ou les limites à droites et à gauche du taux de variation existent, mais sont distinctes : la demi-droite correspondante s'appelle une demi-tangente, et un point où aboutissent deux demi-tangentes distinctes s'appelle un *point anguleux*; c'est souvent le cas des fonctions f de la forme $|g|$, aux points où g s'annule...

— 3) La limite est infinie : l'analyse «géométrique» montre que le graphe est tangent à une droite «verticale» (une parallèle à Oy); si on n'a affaire qu'à une demi-tangente (c'est-à-dire si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} T(a;x) = -\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} T(a;x)$), on dit que le point étudié est un point de rebroussement (c'est par exemple le cas de l'origine pour le graphe de $[x \mapsto \sqrt{|x|}]$).

— 4) Il n'y a pas de limite (et donc pas de tangente) : c'est possible! Voici des exemples typiques :

3.2 Deux situations exceptionnelles : $x \sin 1/x$ et $x^2 \sin 1/x$.

La fonction $f\colon x \mapsto x \sin 1/x$, prolongée en 0 par $f(0) = 0$, est continue en 0, mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x$ n'existe pas (au voisinage de 0, $\sin 1/x$ oscille entre -1 et 1); ce qui d'après la définition veut dire que $f'(0)$ n'existe pas. Un agrandissement du graphe près de 0 donne, plutôt qu'un graphe «plat», l'impression que tout le secteur angulaire entre $[Y = -X]$ et $[Y = X]$ est rempli par le graphe! On peut aussi trouver des situations où à tout grossissement, le graphe reste «courbe» (par exemple $x \mapsto x \sin \ln x \ldots$)

Pour les fonctions précédentes, la position de la sécante n'a pas de «limite» quand on se rapproche de 0. On pourrait penser que cette phrase est équivalente à dire que la tangente au graphe (la «direction» de la courbe) n'a pas de limite près de 0, mais c'est inexact : le cas de la fonction $[x \mapsto x^2 \sin 1/x]$ est un intéressant contre-exemple, qui est étudié plus précisément dans l'exercice-type n° 17.

La fabrication de ce genre de fonctions bizarres (les mathématiciens disent qu'elles sont «pathologiques») n'est pas seulement un jeu gratuit : outre qu'elles montrent que certains résultats «intuitifs» nécessitent des démonstrations rigoureuses, et sont même faux pour des fonctions arbitraires, il s'avère que les fonctions «régulières» ne sont qu'un cas très particulier (même en pratique, où elles proviennent souvent de simplifications peut-être excessives de la réalité); ainsi, il est possible de construire des fonctions continues qui n'ont de dérivée nulle part, et il s'avère que les graphes correspondants sont des fractales, dont l'intérêt pratique ne cesse d'augmenter.

3.3 Continuité des fonctions dérivables.

Toutefois, les fonctions «usuelles» sont le plus souvent partout dérivables (sauf peut-être en certains points exceptionnels); et en tout point où il y a une tangente, on s'attend à ce que le graphe soit continu : il est en effet aisé de démontrer (ce sera fait en classe) que *toute fonction dérivable en a est continue en a*. Mais la réciproque est fausse (comme le montre le cas des points anguleux), et il existe même des fonctions continues nulle part dérivables; de plus, ce qui est plus inattendu, il s'avère aussi, comme on vient de le voir, que certaines fonctions dérivées ne sont pas (partout) continues (on étudiera de plus près cette question en **6. 4**); on voit que le langage ordinaire peut parfois, comme ici, se révéler trompeur...

4 Calcul des fonctions dérivées.

4.1 Définitions et notations.

Si le nombre dérivé $f'(a)$ existe pour tout $a \in A \subset \mathrm{D}_f$, on dit que f est dérivable sur A. La fonction qui à tout a fait correspondre le nombre $f'(a)$ (quand il existe) s'appelle la fonction dérivée de f et se note f'. Mais en réalité, si d'autres lettres figurent dans la définition de f, l'expérience montre que des erreurs se produisent aisément; on aura alors intérêt à utiliser des notations plus rigoureuses, soit de la forme $[x \mapsto f(x)]'$ (mais c'est peu commode), soit la notation de Leibnitz : $f' = \dfrac{df}{dx}$, ou plus précisément $f' \colon x \mapsto \dfrac{d}{dx} f(x)$ (quand plusieurs variables interviennent, on la remplace par $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x;y)$ par exemple, comme cela sera exposé au chapitre 14). Enfin, il existe une troisième notation, due à Newton, et qui n'est plus guère utilisée que par les mécaniciens, du type $\dot{x}$, $\ddot{x}$, ... pour noter (x étant une fonction de t) les dérivées $x'(t), x''(t) \ldots$

Le calcul de limite correspondant à un nombre dérivé n'est pas toujours très facile, de plus on a souvent besoin de la dérivée pour tous les points du graphe, d'où l'intérêt de calculer directement la fonction dérivée de f, ce qui heureusement est toujours possible quand on connait les dérivées de fonctions plus simples dont f est formée.

4.2 Dérivées des combinaisons «élémentaires» : $(af + bg)', (fg)', (f/g)' \ldots$

Et en effet, c'est un simple exercice de calcul de limites de prouver que si f et g sont dérivables, a et b constantes, $af + bg$ est dérivable, et $(af + bg)' = af' + bg'$. Obtenir la formule classique $(fg)' = f'g + fg'$ est plus délicat; on le verra en classe, ainsi que les formules $(1/f)' = -f'/f^2$ et $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

Par récurrence, on prouve alors aisément que $(f^n)' = nf'f^{n-1}$ (qui généralise la formule classique $([x \mapsto x^n])' = [x \mapsto nx^{n-1}]$); cette formule est en réalité valable pour n **réel** quelconque, comme on le verra au prochain paragraphe.

Pour pouvoir utiliser ces formules, il faut bien sûr connaître les dérivées des fonctions «usuelles» (qui ont été rappelées au chapitre 4); la plupart sont aisées à prouver en utilisant les techniques de calcul de limites qu'on a vu; ainsi $(\sin)' = \cos$ résulte d'une manipulation classique de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$ (par transformation de sommes en produits, et mise en évidence de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x-a)}{x-a} = 1$).

Les calculs de dérivées contenant des produits, des quotients et des puissances sont parfois facilités par l'utilisation de la «dérivée logarithmique», définie par f'/f (aux points où f est non nul). En effet, on peut démontrer par calcul direct que

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \quad ; \quad \frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \quad ; \text{ et que } \quad \frac{(f^\alpha)'}{f^\alpha} = \alpha \frac{f'}{f} \quad ,$$

ces résultats venant bien sûr de ce que $f'/f = (\ln |f|)'$, mais pouvant même se généraliser à $\mathbf{C}$ sans utiliser ln !

4.3 Dérivation des fonctions composées.

En utilisant la notation de Leibnitz, on peut assez facilement deviner la règle de dérivation de $h = g \circ f$: posant $X = f(x)$, on a $\dfrac{dg}{dx}(X) = \dfrac{dg}{dX}\dfrac{dX}{dx}$. Un calcul de limite reprenant cette manipulation «formelle» semble facile : si f est dérivable en a, et si g est dérivable en $f(a)$, on aura

$$\lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \left(\lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}\right)\left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right);$$

et la première de ces deux limites vaut (en utilisant le changement de variable $X = f(x)$) $\displaystyle\lim_{X\to f(a)} \frac{g(X) - g(f(a))}{X - f(a)}$, c'est-à-dire $g'(f(a))$; on en déduit la formule $(g\circ f)' = f' \times (g' \circ f)$, sans doute plus «concrète» sous la forme $(g(f(x))' = f'(x).g'(f(x))$. Mais en réalité, ce qui précéde n'est pas non plus une preuve satisfaisante, car $f(x) - f(a)$ pourrait s'annuler «trop souvent» près de a, rendant le calcul de limite illégal; il faudrait en fait séparer en deux cas ($f'(a)$ nul ou non). L'utilisation des approximations affines tangentes permet une démonstration rigoureuse, et évitant ces complications; elle est proposée dans l'exercice **3**.

Cette formule donne comme cas particuliers toutes les formules vues au chapitre 5 : $(\ln f)' = f'/f$, $(e^f)' = f'e^f$ (d'où on tire la dérivée de $f^\alpha = e^{\alpha \ln f}$, qui vaut $\alpha f' f^{\alpha-1}$), ou encore $(\mathrm{Arc\,tg}\, f)' = \dfrac{f'}{1+f^2}$.

4.4 Dérivée de f^{-1}.

Si f est bijective et dérivable sur un intervalle (ce qui entraîne qu'elle est continue, donc monotone), les tangentes au graphe de f^{-1} sont clairement symétriques à celles du graphe de f (par rapport à la première bissectrice). Mais outre que cela n'entraîne pas la dérivabilité de f^{-1} (car il faut que $f' \neq 0$), cette «démonstration» n'est guère convaincante pour des fonctions irrégulières comme celles vues plus haut. Une preuve rigoureuse n'est heureusement pas difficile (on la verra en exercice); on aboutit à : En tout a tel que $f'(f^{-1}(a))$ existe et est non nul, la fonction f^{-1} est dérivable et sa dérivée est donnée par la «formule» :

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

C'est ainsi qu'on obtient par exemple la fonction dérivée de $x \mapsto \mathrm{Arc}\sin x$, car on doit avoir $(\mathrm{Arc}\sin x)' = 1/\cos(\mathrm{Arc}\sin x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Il est aussi possible de retrouver ces formules par changement de variable, ou encore en remarquant que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$, et donc (avec $g = f^{-1}$) $g' \times (f' \circ g) = 1$

5 Dérivées d'ordre supérieur.

5.1 Définitions et notations.

Si f est dérivable, la fonction dérivée f' peut être dérivable à son tour, et cette nouvelle dérivée s'appelle la dérivée seconde de f et se note f''. On définit de même les dérivées successives troisième, quatrième, ..., n-ème; que l'on note $f''', f'''' \ldots$, ou de manière plus générale $f^{(n)}$; cette dernière notation étant définie par récurrence par $f^{(1)} = f'$ et $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

En utilisant la notation de Leibnitz, on est amené à $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$, mais il s'agit plus d'un truc de notation que d'une véritable formule; toutefois en notant $\dfrac{d}{dx}$ l'opérateur qui associe à une fonction sa fonction dérivée, on obtient des notations cohérentes; il serait possible de définir ainsi tout un «calcul» abstrait sur les dérivées et les différentielles (qu'on verra en Spé), qu'on appelle le «calcul symbolique».

De nombreux théorèmes généraux (par exemple les formules de Taylor) ne s'appliquent qu'aux fonctions «possédant suffisament de dérivées (successives)». Pour abréger, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A si elle est n fois dérivable sur A et si $f^{(n)}$ est continue sur A. L'expression «f est de classe $\mathcal{C}^0$» veut simplement dire que f est continue, et on emploie parfois l'expression «de classe $\mathcal{D}^n$» pour dire que $f^{(n)}$ existe sans nécessairement être continue. Ces classes sont des ensembles de fonctions «assez régulières», construits pour que les «pathologies» du genre $x^2 \sin 1/x$ ne se produisent pas; on verra en **6** que de toute façon, il n'y a que des fonctions de ce genre qui soient de classe $\mathcal{D}^n$ et non de classe $\mathcal{C}^n$. Toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n (sur leur domaine de définition), ce qu'on abrège en disant qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. C'est cette classe (souvent appelée familièrement la classe des «bonnes fonctions») qui constitue l'ensemble des fonctions à graphes réguliers pour lesquels les intuitions géométriques sont toujours correctes.

Un calcul direct (ou éventuellement une récurrence facile) donne les dérivées suivantes (qu'il est conseillé d'apprendre par cœur) : $(t \mapsto t^\alpha)^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$ (qui se simplifie (facilement) si α est entier et (nettement plus difficilement) si 2α est entier), $(t \mapsto \ln t)^{(n+1)}(x) = (t \mapsto 1/t)^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, $(\sin)^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$ et enfin la formule «générale» $(t \mapsto f(at+b))^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

En dehors de cas très simples analogues (polynômes en e^x, sommes trigonométriques ...), et de la formule de Leibnitz, la démonstration de l'existence (et a fortiori le calcul) des dérivées successives est assez délicate, et nécessite en général un raisonnement par récurrence. On peut ainsi montrer (c'est un exercice classique) que la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ est elle-même dans cette classe, et que si f est une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ **dont la dérivée ne s'annule pas**, il en est de même de f^{-1}. Malheureusement, ces résultats sont hors-programme, et il faudra donc les redémontrer dans chaque cas particulier.

5.2 La formule de Leibnitz.

Si on adjoint la notation $f^{(0)} = f$, on peut obtenir une expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ du produit fg (quand f et g sont de classe $\mathcal{D}^n$) très semblable à la formule du binôme; on l'appelle la **formule de Leibnitz** :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Cette formule se démontre par récurrence (cela sera fait en classe), et constitue une source importante d'exercices-types : on pourra par exemple étudier la fiche n° 18; c'est ainsi également qu'on obtient la relation de récurrence entre les polynômes d'Hermite, définis par $P_n(x) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$.

6 Propriétés globales des fonctions dérivables.

6.1 Le lemme de Rolle.

On va à présent s'intéresser à certains résultats généraux sur les fonctions dérivables, et tout d'abord à la justification de la classique recherche des extremums là où la dérivée s'annule. Ce résultat préliminaire (qu'on appelle donc un *lemme*) est le

Lemme de Rolle. *Soit f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Il existe un nombre $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Autrement dit, il y a un point (entre a et b) où la tangente est parallèle à l'axe Ox. La démonstration (hors-programme, mais pas très difficile) consiste à le construire (en utilisant le principe du maximum), puis à remarquer (par une analyse soignée de la limite qui définit $f'(c)$) que s'il y a un extremum en c, $f'(c)$ doit être nul.

6.2 La formule des accroissements finis.

Mais en réalité, le lemme de Rolle est un cas particulier du résultat général suivant : sur l'intervalle $]a;b[$, il y a une tangente parallèle à la corde (la sécante) reliant les extrémités.

La démonstration rigoureuse de ce résultat pour la fonction f (avec $f(a)$ et $f(b)$ quelconques) utilise la fonction auxiliaire g définie par $g(x) = f(x)-(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, à laquelle on applique le lemme de Rolle. (La justification de ce choix de g et le calcul exact seront faits en classe). On aboutit au

Théorème des accroissements finis : *Si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, il existe c (avec $a < c < b$) tel que*

$$\text{«Formule des accroissements finis» :} \qquad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Remarques :

1) La dérivabilité en a et en b n'est pas nécessaire; cela nous permettra d'obtenir quelques résultats intéressants valables même en des points «irréguliers».

2) La «formule» n'est pas explicite, c'est-à-dire qu'on ne connaît pas c; toutefois, si l'on dispose de résultats généraux sur f', on peut en déduire des propriétés du taux de variation (des encadrements, par exemple), donc des relations entre f et f'.

6.3 Étude des variations de f.

Un exemple d'une telle propriété est la classique relation entre le signe de f' et les variations de f (avec les mêmes conditions sur f : continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$). En effet, si f' est strictement positive sur l'intervalle $]a;b[$, on obtient, en appliquant la formule des accroissements finis à l'intervalle $[x_1;x_2]$ (où $a \leq x_1 < x_2 \leq b$) : $0 < f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, donc $f(x_1) < f(x_2)$, ce qui prouve que f est strictement croissante sur $[a;b]$. On voit de même que $f' < 0$ entraine f strictement décroissante, et que $f' = 0$ entraine f constante.

Aussi bizarre que cela puisse paraître, cette dernière propriété n'était pas «évidente» : on connait par exemple des fonctions continues strictement croissantes, dont la dérivée est cependant partout nulle sur $\mathbf{Q}$!

6.4 Continuité de f'.

Si f est dérivable sur $]a;b[$, en appliquant le théorème des accroissements finis à des intervalles $[a;x]$, avec x tendant vers a, on voit qu'on dispose de $c(x)$ aussi proches de a qu'on veut, tels que $f'(c(x)) = T(a;x)$. Il ne faut pourtant pas en conclure que $\lim\limits_{c\to a} f'(c) = \lim\limits_{x\to a} T(a;x)$: l'une de ces deux limites pourrait ne pas exister ! On démontrera néanmoins que si la première limite existe, elle est égale à la seconde, ce qui prouve que :

a) Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe (et est finie), f est dérivable (à droite) en a et $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = f'(a)$

b) Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$, $f'(a)$ n'existe pas, et il y a une (demi) tangente verticale en a.

Mais hélas, il est possible que $f'(a)$ existe et pas $\lim\limits_{a} f'$, et donc que f' ne soit pas continue en a (c'est par exemple le cas de $x^2 \sin 1/x^2$) ; toutefois, on ne peut pas avoir de discontinuité de f' «avec saut» (c'est-à-dire par exemple que $f'(a)$ existe et que $f'(a) \neq \lim\limits_{a^+} f'$) ; ainsi une fonction telle que $E(x)$ ne saurait avoir de primitive.

Ainsi, la classe $\mathcal{D}^n$ contient plus de fonctions que la classe $\mathcal{C}^n$; on voit néanmoins que les «exceptions» doivent être très irrégulières : on peut montrer à l'aide du théorème précédent qu'au voisinage d'un point de discontinuité de f', les valeurs de f' «remplissent» tout un intervalle (en oscillant entre les bornes). Cependant, si $n > 1$, il se peut que l'irrégularité de $f^{(n)}$ soit peu visible sur le graphe de f...

7 Applications.

7.1 Calcul de limites.

Un grand nombre de formes indéterminées du type «0/0» se ramènent au calcul d'un nombre dérivé : ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, car il s'agit (par définition) de $f'(0)$, où f est la fonction $x \mapsto e^x$. De façon plus générale, on peut souvent exprimer $\lim\limits_{0} f/g$ comme $(\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x) \times (\lim\limits_{x\to 0} x/g(x))$, et donc se ramener à f'/g' ; l'énoncé précis de cette méthode s'appelle la «règle de l'Hospital», elle fera l'objet d'un DM. Cependant, sa justification rigoureuse, passant par ce qu'on appelle la «formule des accroissements finis généralisés», est hors programme, et on verra que les cas vraiment difficiles ne peuvent de toute façon être résolus que par les méthodes du prochain chapitre.

7.2 Applications de la formule des accroissements finis.

A partir d'un encadrement de la dérivée sur l'intervalle $]a;b[$, la formule des accroissements finis permet de déduire un encadrement du taux de variation. Ainsi, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, et donc que f' est bornée sur $]a;b[$, on a, en posant $m = \inf\limits_{[a;b]} f'$ et $M = \sup\limits_{[a;b]} f'$:

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

qu'on appelle l'**inégalité des accroissements finis**.

On peut «préciser» la valeur de $f(b) - f(a)$ en faisant figurer $f'(c)$ (mais bien sûr c reste inconnu) ; si par exemple on se place sur l'intervalle $[0;x]$, on remarque

que $0 < c/x < 1$, et qu'il en est de même sur l'intervalle $[x;0]$ quand $x < 0$; après remplacement, on obtient la formule de Mac-Laurin :

$$(\forall x)(\exists\theta)(f(x) = f(0) + xf'(\theta x) \quad \text{et} \quad 0 < \theta < 1)$$

mais bien sûr on ne connait pas plus θ qu'on ne connaissait c...

Cette formule se réécrit sur $[a;x]$ en :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c) = f(a) + (x-a)f'(a+\theta(x-a))$$

qu'on appelle la formule de Taylor à l'ordre 1; ce n'est pas exactement le DL_1 vu au début, et on ne peut les identifier que si f est une «bonne fonction» (c'est-à-dire une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a).

L'inégalité des accroissements finis permet souvent d'obtenir des majorations de la forme $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$, où k est une constante ne dépendant pas de (x,y) (au moins sur un certain intervalle). On dit alors que f est «lipschitzienne»; et si $k < 1$, que f est «contractante». On verra que ce type d'inégalité est essentiel pour l'étude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ au chapitre 12.

7.3 Utilisations géométriques de la dérivée seconde.

Dire que f'' est positive sur $[a;b]$, c'est affirmer que f' est croissante sur cet intervalle, et donc que la pente (le coefficient directeur) des tangentes augmente. Graphiquement, la «courbe» tourne vers le haut (se redresse de plus en plus); ce qu'on peut traduire en disant qu'elle reste «au-dessus» de sa tangente. Une démonstration rigoureuse de ce résultat nécessiterait la formule de Taylor à l'ordre 2; cela étant, on dit qu'un graphe (ou qu'une fonction ayant ce graphe) est convexe si il reste «en-dessous» de ses sécantes, et on démontre que pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, ces trois propriétés sont équivalentes. On a donc alors :

$$f \text{ convexe sur } [a;b] \iff f'' \text{ positive sur } [a;b] \iff f'' \text{ croissante sur } [a;b] \iff$$
$$(\forall x,y)(a \leq x < y \leq b \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y))$$
$$\iff (\forall x,y,\lambda) a \leq x < y \leq b,\ 0 < \lambda < 1 \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

(cette dernière formule sera démontrée en exercice; elle résulte de la représentration paramétrique de la sécante que nous avons vue au chapitre 3)

Quand f'' est négative, on dit que f est concave. Le passage de f convexe à f concave (qui pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ ne peut se produire que si $f'' = 0$) s'appelle un point d'inflexion, et implique qu'en ce point la courbe traverse sa tangente; une analyse précise de la position relative des courbes et des tangentes dans le cas général sera faite après le chapitre 11.

Exercices

1 Définitions générales.

1 ($\star\star$) Montrer par calcul direct que $[x \mapsto e^x]'(a) = e^a$, la limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ étant supposée connue.

2 ($\star\star$) L'approximation affine tangente à $\sqrt{1+x}$ en 0 est :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

En déduire par changement de variable celle tangente à $\sqrt{1+ax}$ en 0, puis la dérivée de $\sqrt{ax+b}$ en 0.

3 ($\star\star\star$) Généralisant l'exercice précédent, montrer qu'on peut ainsi retrouver la formule de dérivation des fonctions composées. Où est passé le calcul de limite ?

> **T 17** Montrer que la fonction $\tilde{f}$, obtenue en prolongeant par continuité en 0 la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^2 \sin(1/x)$, est (partout) dérivable, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

2 Calcul de dérivées.

4 ($\star\star$) Calculer les dérivées de

$$\operatorname{Arc}\sin\sqrt{1-x^2} \qquad ; \qquad \ln(\ln(\ln(\ln x))) \qquad ; \qquad x^{x^{x^x}}$$

5 ($\star\star$) Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $(1-x^2)\cos x$.

6 ($\star\star$) Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $\dfrac{e^x}{x}$.

> **T 18** Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+8x}}$; montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1/8, +\infty[$, et calculer explicitement $f^{(n)}(1/8)$ (la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f en 1/8).

7 ($\star\star\star$) Montrer que la fonction réciproque de $x \mapsto 1/\cos x$ est définie et dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. Calculer sa dérivée (sous forme d'une fonction explicite de x). Que se passe-t-il en 1 et -1 ?

8 ($\star\star\star$) Déterminer les 3 premières dérivées successives de $1/f$ (où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$) Peut-on généraliser ? Démontrer par récurrence le résultat que vous avez conjecturé.

9 ($\star\star$) Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire, et que la dérivée d'une fonction impaire est paire. En déduire qu'en un centre de symétrie, la dérivée seconde est nulle.

3 Propriétés des fonctions dérivables.

T 19 Soit n un entier ≥ 1, f une fonction de classe $\mathcal{D}^n$ sur $]\,a, b\,[$, de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a, b]$, et $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une suite finie de réels, strictement croissante, telle que $a_0 = a$, $a_n = b$, et $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $f(a_i) = 0$ (où $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre p et q, autrement dit $\mathbf{N} \cap [p, q]$). Montrer qu'il existe $c \in\,]\,a, b\,[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$ («lemme de Rolle généralisé»).

T 20 Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty\,[$, telle que $f(0) = f'(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Montrer qu'il existe un $a > 0$ tel que la tangente au graphe de f en a passe par l'origine.

10 ($\star\star$) Calculer la valeur de θ (en fonction de x) dans la formule de Mac-Laurin pour les fonctions : $[x \mapsto ax^2 + bx + c]$ et $[x \mapsto x^n]$

11 ($\star\star\star$) On pourrait penser que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, la dérivée s'annule aux extremums **en changeant de signe**. Chercher comme contre-exemple une fonction de la forme $[x \mapsto x^4(a + b \sin 1/x^2)]$, avec $a > b > 0$ (on montrera qu'au voisinage du minimum absolu 0, la dérivée change de signe une infinité de fois ; ne pas oublier de vérifier que la fonction est $\mathcal{C}^1$). Comment formuler une règle correcte ? Que peut-on dire d'analogue pour les points d'inflexion ?

10. DÉRIVATION

Plan

10. DÉRIVATION

(Formulaire)

1 Définitions générales.

Définition 1. 1. *On dit que f est* **dérivable** *en a si la limite* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *existe et est finie; cette limite est alors appelée le* **nombre dérivé en** a **de** f, *et notée* $f'(a)$.

Définition 1. 2. *On dit que f est* **dérivable** *sur un intervalle I si f est dérivable en tout point de I ; la fonction qui à a associe le nombre $f'(a)$ est alors appelée fonction* **dérivée** *de f, et se note f' ; si on représente f par $f : x \mapsto f(x)$, on notera parfois (Leibnitz)* $f' : x \mapsto \dfrac{d}{dx} f(x)$.

Définition 1. 3. *Si f est dérivable en a, la fonction $g : [x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)]$ est appelée* **application affine tangente à** f **en** a *; son graphe est une droite tangente en $(a, f(a))$ au graphe de f.*

On a alors $f(x) = g(x) + (x - a)\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$; cette écriture s'appelle un DL_1 de f en a.

Définition 1. 4. *Si f est dérivable, et si sa dérivée est à son tour dérivable, on dit que f posséde une* **dérivée seconde**, *et on note $f'' = (f')'$. Pluq généralement, et par récurrence, si f est successivement k fois dérivable, on dit qu'elle possède une* **dérivée d'ordre k** *(ou qu'elle est de classe $\mathcal{D}^k$) ; cette dérivée se note* $\dfrac{d^k}{(dx)^k} f$ *ou encore* $f^{(k)}$. *Si cette dérivée est continue, on dit que f est* **de classe** $\mathcal{C}^k$ *; enfin, si f est indéfiniment dérivable, on dit qu'elle est* **de classe** $\mathcal{C}^\infty$.

2 Calcul des fonctions dérivées.

En supposant que f et g sont dérivables sur le même intervalle I, on a sur I les formules classiques :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \qquad \text{(où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes)}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

Si f est dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$, on a

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

ou encore

$$(g(f(x)))' = f'(x).g'(f(x))$$

Enfin, si f est une bijection dérivable (de I sur $f(I)$), f^{-1} est dérivable en tout point b tel que $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, et on a

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Pour les dérivées d'ordre supérieur, on a seulement

$$(\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)} \qquad \text{(où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes)}$$

$$(t \mapsto f(at+b))^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

et la **formule de Leibnitz**

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

(avec la convention $f^{(0)} = f$), ainsi que les dérivées suivantes (qu'il est recommandé de savoir retrouver facilement) :

$$(t \mapsto t^{\alpha})^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

en particulier, si α est entier

$$(t \mapsto t^{p})^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ \dfrac{p!}{(p-n)!} & \text{si } n \leq p \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} (t \mapsto 1/t)^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ \ln^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \\ \sin^{(n)}(x) &= \sin(x + n\pi/2) \end{aligned}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, il en est de même de $1/f$ (là où f ne s'annule pas) et de f^{-1}, là où f' ne s'annule pas; mais ces résultats sont hors-programme, et on ne connait pas de formule vraiment régulière...

3 Propriétés des fonctions dérivables.

Si f est dérivable en a, elle est continue en a; la réciproque est fausse.

Lemme de Rolle. *Soit f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Il existe un nombre $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème des accroissements finis. *Si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, il existe c (avec $a < c < b$) tel que*

«Formule des accroissements finis» : $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Inégalité des accroissements finis. *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, et donc si f' est bornée sur $]a;b[$, on a, en posant $m = \inf_{[a;b]} f'$ et $M = \sup_{[a;b]} f'$:*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Définition 3. 1. *f est* **convexe** *(sur $[a,b]$) si le graphe de f est situé «au-dessous» de ses sécantes, c'est-à-dire si, pour tous les a', b' et x tels que $a \leq a' < x < b' \leq b$, on a*

$$f(x) \leq (x-a')\left(\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'}\right)+f(a')$$

ou encore, pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout (a',b') tel que $a \leq a' \leq b' \leq b$,

$$f(\lambda a' + (1-\lambda)b') \leq \lambda f(a') + (1-\lambda)f(b').$$

Définition 3. 2. *f est* **concave** *(sur $[a,b]$) si $-f$ est convexe sur $[a,b]$.*

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, on a la caractérisation suivante :
f convexe sur $[a;b]$ $\iff$ f'' positive sur $[a;b]$ $\iff$

$$(\forall x,y)(a \leq x < y \leq b \Rightarrow f'(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y)).$$