12. SUITES NUMÉRIQUES

1 Plan d'étude.

1.1 Formules explicites.

On sait qu'une suite numérique peut être considérée comme une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. Si cette application est donnée par une formule $u_n = f(n)$ de manière explicite (autrement dit, si on peut étudier directement la fonction f), l'essentiel du travail est fait. Toutefois, on pensera à exploiter les simplifications apportées par le fait que n est entier; en particulier, on pourra souvent étudier le sens de variation de u sans avoir besoin de calculer la dérivée de f.

Le plus souvent, malheureusement, établir une formule explicite est difficile ou impossible; outre les méthodes vues au chapitre 6, nous allons ici préciser les formules correspondant à certaines récurrences (en **2**), et donner des méthodes d'étude pour les suites définies en **3**, et pour lesquelles on ne peut trouver de «formule».

1.2 Sens de variation.

Comme pour les fonctions, une suite est dite croissante (stricte) si $n < p \Rightarrow u_n < u_p$; mais on voit (par une récurrence évidente) qu'il suffit que pour tout k (éventuellement dans un certain intervalle) on ait $u_{n+1} - u_n > 0$; c'est donc l'étude du signe de cette quantité (qui est d'ailleurs l'analogue d'un taux de variation) qui suffira à préciser les variations de la suite. On est parfois amené, pour des suites à termes positifs, à la remplacer par l'étude de u_{n+1}/u_n (que l'on compare à 1); c'est surtout utile pour des suites «multiplicatives», comme la suite $u_n = a^n/n!$.

1.3 Suites adjacentes.

Pour des suites quelconques, il arrive souvent qu'on puisse extraire des sous-suites monotones (par exemple (u_{2k}) et (u_{2k+1})); dans certains des cas étudiés dans ce chapitre, on a même parfois ainsi deux suites u et v telles que u soit croissante, v soit décroissante, et que $(v_n - u_n)$ soit une suite (évidemment décroissante) de limite 0. On dit alors que les deux suites u et v sont *adjacentes*; il est alors aisé de voir (d'après le théorème de la borne supérieure) qu'elles convergent et ont la même limite (voir plus bas).

1.4 Limites et comportement à l'infini.

Le seul comportement «limite» d'une suite se produit quand n tend vers l'infini; de ce fait, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ se note simplement $\lim u_n$ (ou $\lim u$); si cette limite existe et vaut L (fini)*, on dit que la suite *converge* (vers L); sinon, on dit qu'elle *diverge.* Dans le cas d'une formule explicite $u_n = f(n)$, et si $\lim\limits_{+\infty} f$ existe, on a, d'après le théorème de composition des limites, $\lim u = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (cependant, la réciproque peut être fausse si f n'a pas le même comportement pour les entiers et pour les réels,

---

* Rappelons que cela signifie que $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon)$ (définition de Cauchy, chapitre 9).

comme c'est le cas pour $f(x) = \sin 2\pi x$). Sinon, on sera souvent amené à «deviner» une limite A, et à étudier le comportement de $|u_n - A|$.

Les définitions du chapitre précédent s'étendent aux suites, ainsi on écrira (sans préciser que c'est en $+\infty$) $u_n \ll n^2$, $v_n \sim 1/n$, $(n+2)\sin n = O(n)$ ou $1/n! = o(1/a^n)$ pour dire que (respectivement) $\lim u_n/n^2 = 0$, que $\lim nv_n = 1$, que, pour $n > 2$, $|((n+2)\sin n)/n| < A$, ou que $\lim a^n/n! = 0$.

2 Suites récurrentes.

2.1 Suites géométriques : rappel.

Les suites géométriques sont définies par $u_n = Ak^n$ (k s'appelant la *raison* de la suite), ce qui équivaut à la définition (par récurrence) $u_{n+1} = ku_n$; il est commode, comme pour toute suite dont les termes ont des signes variables, d'étudier d'abord la suite $|u_n|$ (qui ici est encore une suite géométrique de raison $|k|$), et de «rajouter» ensuite le signe, qu'on aura intérêt à noter par $(-1)^n$. On voit que ces suites convergent (vers 0) quand $|k| < 1$; le reste du comportement est facile (mais fastidieux) à étudier; on retiendra surtout la formule pour les sommes de termes : $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = A\dfrac{k^{n+1}-1}{k-1}$ et (si $|k| < 1$) la limite $\lim s_n = \dfrac{A}{1-k}$, dont une application à la notation décimale des rationnels sera faite en exercice.

2.2 Suites «arithmético-géométriques».

Les suites définies par une formule de récurrence de la forme $u_{n+1} = Au_n + B$ (où A et B sont des constantes), appelées *suites arithmético-géométriques* parce qu'elles généralisent les suites arithmétiques ($A = 1$) et géométriques ($B = 0$), peuvent être ramenées à une suite géométrique (dite «auxiliaire») en posant $v_n = u_n + a$, avec a constante bien choisie (on vérifie aisément, par identification, que pour avoir $v_{n+1} = Av_n$, il suffit de prendre $a = B/(A-1)$). Comme on a $v_n = A^n v_0$, on en tire la formule explicite $u_n = B/(1-A) + A^n(u_0 + B/(A-1))$.

2.3 Suites définies par une récurrence à deux termes.

On va à présent s'intéresser à une autre généralisation : les récurrences de la forme $(E) : u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n$ (avec u_0 et u_1 donnés) (*récurrences linéaires à deux termes*). On démontre par récurrence que si deux suites u et v qui vérifient (E) ont les mêmes termes initiaux ($u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$), elles sont égales. Il suffit donc de trouver une suite vérifiant (E) pour avoir une formule explicite.

Par analogie avec les équations différentielles, on cherche d'abord des «solutions» qui soient des suites géométriques, en négligeant par conséquent les «valeurs initiales» (on montrera en classe une méthode plus astucieuse, mais un peu artificielle, permettant de justifier complétement ce choix, en utilisant des suites auxiliaires de la forme $v_n = u_{n+1} - ku_n$) : on voit que pour que $u_n = ak^n$ vérifie (E), il faut que $(\star)$ $k^2 = Ak + B$. On vérifie aisément que si k_1 et k_2 sont les solutions de cette équations, toutes les suites $u_n = a_1k_1^n + a_2k_2^n$ vérifient (E); il suffit alors de déterminer a_1 et a_2 (à l'aide de u_0 et u_1). La méthode semble échouer quand l'équation $(\star)$ n'a pas de racines, mais il suffit alors de passer dans $\mathbf{C}$ (le cas d'une racine double est plus embarrassant, et on montre qu'alors, $u_n = a_1(k^n) + a_2(nk^n)$ convient). Une application classique est la suite de Fibonnacci $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$), que l'on étudiera en exercice; on aboutit à la formule :

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

2.4 Applications à des suites analogues.

Plus généralement, des suites définies par $u_{n+1} - Au_n = B(n)$ peuvent être explicitées par une méthode analogue à la «variation des constantes» pour les équations différentielles : en posant $u_n = v_n A^n$, on aboutit à une formule pour v de la forme $v_n = \sum_{k=0}^{n} f(n)$, qu'on peut parfois simplifier.

On essaiera (à titre d'exercice) de voir comment généraliser encore ces méthodes à (par exemple) $u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n + C$, ou encore (à l'aide des logarithmes) à $u_{n+1} = A(n)u_n$.

3 Suites définies par itération.

3.1 Définitions.

On dit qu'une suite u est définie par itération (de f) si $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec u_0 donné). Sauf dans des cas très particuliers, il est impossible d'obtenir des formules explicites pour ces suites, et on doit étudier leurs propriétés par récurrence. Comme elles dépendent de celles de la fonction f, et que celle-ci voit son comportement changer selon l'intervalle où l'on se trouve, on est amené à définir la notion d'*intervalle de stabilité (de f)* : il s'agit d'un intervalle I tel que $f(I) \subset I$. On voit alors par récurrence que si $u_{n_0} \in I$, $u_n \in I$ pour tout $n \geq n_0$.

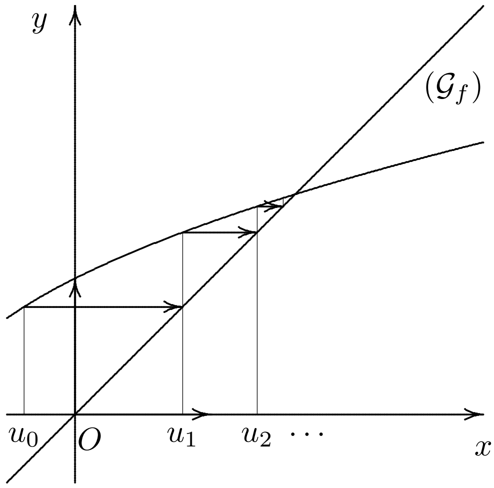
3.2 Calcul de la limite.

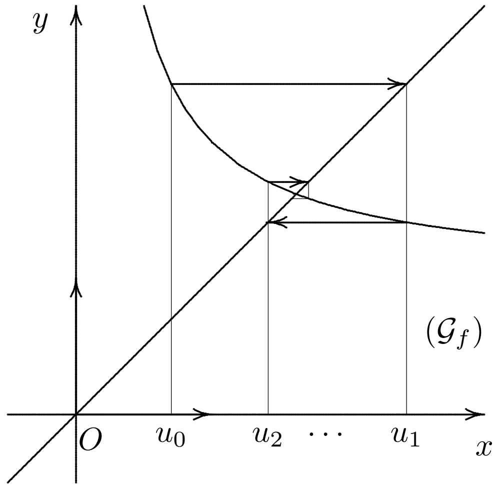
Si la fonction f est continue et si u converge vers L, on sait (composition des limites) que $\lim f(u_n) = f(\lim u_n)$; et comme il est clair, pour la même raison, que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, on doit avoir $L = f(L)$ (on dit que L est un point fixe de f). Si cette dernière équation peut être résolue, on a souvent dès ce stade trouvé la valeur de la limite; mais, comme on va le voir, la convergence n'est nullement obligatoire (tout ce qu'on peut dire, c'est que le L trouvé est la seule limite possible).

3.3 Interprétation graphique.

Si on trace le graphe de f et la première bissectrice $[Y = X]$ (qui se coupent en L), puis que partant de u_0 on trace u_1, qu'on ramène «en abscisse» par la première bissectrice, et qu'on recommence (ce tracé sera fait en classe), on obtient une illustration du comportement de u, et de sa convergence éventuelle, avec quelques types simples qu'on explorera en exercice. Ces tracés fournissent aussi des idées de démonstration, qu'on va exploiter dans les prochains paragraphes.

Les deux diagrammes suivants illustrent les deux cas usuels de convergence : à gauche, f croissante (et $f'(L) < 1$); à droite, f décroissante (et $f'(L) > -1$). On s'entraînera à les réétablir, on trouve d'ailleurs actuellement des programmes automatisant ces tracés sur certaines calculatrices graphiques, et on verra en TD (d'informatique) comment écrire soi-même un tel programme.





3. 4 Suites monotones.

Si la fonction f est croissante dans un intervalle de stabilité, et si u_0 appartient à cet intervalle, la suite u sera monotone : en effet, par récurrence, si $u_0 < u_1$, on aura $u_n < u_{n+1}$, et si $u_0 > u_1$, on aura $u_n > u_{n+1}$. Il est alors clair que la limite éventuelle sera le premier $L > u_0$ (ou $< u_0$) tel que $f(L) = L$, et l'utilisation du théorème de la borne supérieure permettra généralement de le démontrer.

3. 5 Cas général, fonctions contractantes.

Dans le cas général, (c'est-à-dire quand f n'est pas croissante), la suite u n'est pas monotone. Ainsi, si on a un intervalle de stabilité où f est décroissante, on vérifie aisément que l'on a (par exemple) $u_0 < u_2 < u_4 < \cdots$ et $u_1 > u_3 > u_5 > \cdots$. On pourrait alors étudier la fonction $f \circ f$, mais ce n'est guère commode. Il est plus intéressant de remarquer (en supposant L connu) que la convergence vers L suppose que $|u_n - L|$ diminue (et tende vers 0) ; remarquant alors que $|u_{n+1} - L| = |f(u_n) - f(L)|$, on voit qu'il suffirait que (1) $|f(b) - f(a)| < k|b - a|$ (pour tous les a et b d'un intervalle de stabilité) avec $k < 1$ (une telle fonction est dite *contractante*; on réfléchira au rôle joué par la condition $k < 1$). Or l'inégalité des accroissements finis donne une inégalité telle que (1) quand la dérivée de f n'est pas trop grande; l'interprétation graphique et un «plan d'étude» général seront donnés en TD, la théorie générale de ces suites étant désormais «hors-programme». Inversement, l'étude des suites non convergentes de ce type est un sujet «à la mode» : c'est une des approches possibles de la théorie du chaos, et si la démonstration des résultats, même les plus simples, s'avère très délicate, il est par contre aisé d'explorer «informatiquement» les comportements de ces suites, faisant en particulier apparaître des fractals à présent célèbres; on verra comment simuler tout cela à l'aide de Maple V.

4 Sommations.

On appelle *série de terme général* u_n la suite s donnée par la formule $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et on utilise parfois la notation $s = ((u_n))$. L'étude générale des séries sera faite en Spé, on va seulement ici donner quelques idées élémentaires.

Tout d'abord, si u_n est positif (pour tout n), il est clair que s est croissante; on voit aisément que si u_n n'a pas pour limite 0, s diverge. La réciproque n'est pas vraie :

on a vu que les séries géométriques convergent (pour $k < 1$), mais la série harmonique $s_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ est divergente; il est difficile d'obtenir une condition exacte (on verra quelques cas utiles en Spé), et généralement impossible d'obtenir une valeur «exacte» de la limite (il suffit de penser à $s_n = 1 + 1/4 + 1/9 + \cdots + 1/n^2$, qui converge vers $\pi^2/6$!)

Si u_n change de signe régulièrement ($u_n = (-1)^n v_n$, avec $v_n > 0$) on dit que c'est une suite alternée. Si de plus v_n est décroissante, et que $\lim v_n = 0$, on dit que la série $s = ((u_n))$ est alternée, et on démontrera en exercice que s est alors convergente; en effet, les suites s_{2k} et s_{2k+1} sont alors adjacentes.

Si on peut exprimer le terme général d'une série sous la forme $u_n = f(n+1) - f(n)$, il est alors clair que $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = f(n) - f(0)$. Cette remarque évidente se prolonge à des possibilités d'encadrement si on sait seulement que (par exemple) $f(n) - f(n-1) \leq u_n \leq f(n+1) - f(n)$. Il est souvent possible d'obtenir des encadrements de ce type en les interprétant comme des inégalités des accroissements finis pour une fonction f convenable (le plus souvent en prenant pour f une «primitive» de u); on verra au chapitre suivant cette idée généralisée à la notion de «sommes de Riemann».

Exercices

1 Définitions générales.

1 ($\star$) Montrer que si (u_n) converge, alors $\lim |u_{n+1} - u_n| = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

2 ($\star$) Etudier le sens de variation et la convergence des suites

$$u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 2} \qquad : \qquad v_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 4}$$

3 ($\star\star$) Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$; $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. En déduire la convergence de (u_n) vers une limite ℓ, et déterminer une valeur de n telle que $|\ell - u_n| < 10^{-4}$. En utilisant la «vraie» valeur $\ell = \pi^2/6$, estimer un équivalent de $|\ell - u_n|$ (la partie principale sur l'échelle des n^α).

2 Suites récurrentes linéaires.

4 ($\star\star$) Soit z_n une suite géométrique dans $\mathbf{C}$; c'est-à-dire que $z_{n+1} = k z_n$, où k est une constante complexe. Etudier la convergence des deux suites $u_n = \Re\mathrm{e}(z_n)$ et $v_n = \mathrm{Im}(z_n)$ en fonction du module de k.

5 ($\star\star$) Soit u_n la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $6u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$. Déterminer une formule explicite pour u_n, et en déduire la valeur de $\lim \sum_{k=0}^{n} u_k$.

6 (⋆⋆⋆) On veut déterminer une formule explicite pour la suite u_n définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et (E) $\quad u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$. Résoudre (éventuellement par des méthodes «approchées») l'équation $z^3 - z^2 - z = 1$ (dans $\mathbf{C}$), et (en calquant la démonstration du cours) en déduire les suites géométriques vérifiant (E), puis la formule explicite donnant u_n. Contrôler (avec par exemple $n = 6$) votre réponse.

3 Itération et sommation.

7 (⋆⋆) Soit $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Etudier les variations et la convergence de (u_n). Pouvez-vous expliquer pourquoi la suite semble converger (à la calculatrice) ? Comparer avec la suite $v_{n+1} = v_n + e^{-n}$.

8 (⋆⋆) Soit $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \ln(u_n+2)$. Etudier les variations et la convergence de (u_n). En déduire que l'équation $x = \ln(x + 2)$ possède au moins une solution x_0 sur l'intervalle $]1; +\infty[$. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer (par récurrence) que $|u_n - x_0| \leq (x_0 - 1)/2^n$; en déduire une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de x_0 à 10^{-7} près ; comparer avec la plus petite valeur de n (obtenue à la calculatrice).

T 23 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et (pour tout $n \in \mathbf{N}$) $u_{n+1} = u_n^2 - 1/4$. Étudier ses variations et montrer sa convergence.

9 (⋆⋆⋆) En fonction de la valeur a, déterminer le comportement et la convergence de la suite u donnée par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1/2$.

T 24 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, et $v_n = u_n + a/n$. Montrer qu'il existe une constante a telle que u et v soient deux suites adjacentes ; en déduire, pour tout α réel ≤ -2, la convergence de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

12. SUITES NUMÉRIQUES

Plan

12. SUITES NUMÉRIQUES

(Formulaire)

1 Principes généraux.

Définition 1. 1. *On appelle* **suite numérique** *(définie à partir de n_0) une application de l'ensemble des entiers $\geq n_0$ vers $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Une telle suite u sera notée $(u_n)_{n\geq n_0}$ (ou simplement (u_n) si $n_0 = 0$); u_n s'appelle le* **terme d'indice** *n de la suite u.*

Définition 1. 2. *On dit qu'une suite (réelle) (u_n) est (strictement)* **croissante** *si l'application u est croissante, ce qui équivaut à (pour tout n) $u_n < u_{n+1}$. On définit de même les suites décroissantes, monotones, etc.*

Si (u_n) est à termes positifs, il est parfois plus commode de comparer u_{n+1}/u_n à 1.

Définition 1. 3. *On dit qu'une suite est* **périodique** *(de période $p \in \mathbf{N}$) si (pour tout n) $u_{n+p} = u_n$.*

Définition 1. 4. *On dit qu'une suite u est* **convergente** *(vers L) si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ (qu'on note simplement $\lim u$) existe et est finie (on généralise cette notion à $\mathbf{C}$ en posant $u_n = x_n + iy_n$, et en exigeant que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent).*

Définition 1. 5. *On dit que (u_n) et (v_n) sont deux* **suites adjacentes** *si u est croissante, v est décroissante et si $\lim(v_n - u_n) = 0$. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

2 Suites se ramenant aux suites géométriques.

Définition 2. 1. *On appelle suite* **géométrique** *(de raison $a \neq 0$) une suite u vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n$, et donc $u_n = a^n u_0$. On a la «formule des suites géométriques» (pour $a \neq 1$) $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.*

Définition 2. 2. *On appelle suite* **arithmético-géométrique** *une suite u vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ (a et b constantes non nulles, $a \neq 1$). En utilisant la «suite auxiliaire» (v_n) définie par $v_n = u_n + A$, o- $A = b/(a-1)$, on se ramène à une suite géométrique $v_n = a^n v_0$.*

Définition 2. 3. *On appelle* **suite récurrente linéaire à deux termes** *une suite u vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (une telle suite est déterminée par ses deux premiers termes u_0 et u_1).*

Ces suites sont des «combinaisons linéaires» de deux d'entre elles (autrement dit, $u_n = \alpha s_n + \beta t_n$); il suffit donc de trouver deux solutions; si $k^2 = ak + b$ possède deux racines distinctes k_1 et k_2, on a $u_n = \alpha k_1^n + \beta k_2^n$; sinon, on a $u_n = (\alpha n + \beta)k^n$. Les constantes α et β sont déterminées par u_0 et u_1; le résultat se prouve par récurrence.

3 Suites définies par itération.

Définition 3. 1. *On dit que (u_n) est définie* **par itération** *de f à partir de u_0 (o- f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$) si (pour tout n) $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Si f est croissante, u est monotone. Si f est continue et si u converge vers L, L est un **point fixe** de f : $f(L) = L$.

Définition 3. 2. *On dit que f est k-***lipschitzienne** *sur I (o- k est une constante positive) si (pour tout $x, y \in I$) on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. C'est en particulier le cas si $|f'(x)|$ est majoré sur I par k.*

Théorème du point fixe. *Si $f(I) \subset I$ et si f est k-lipschitzienne sur I* **avec** *$k < 1$ (on dit alors que f est* **contractante***), il existe alors un $L \in I$ unique tel que $L = f(L)$ (L est un point fixe de f), et la suite u définie par itération de f à partir de $u_0 \in I$ converge vers L.*

Ce résultat doit être redémontré dans chaque cas : en pratique, f est dérivable et $|f'| < k$, ce qui permet de montrer que f est k-lipschitzienne (inégalité des accroissements finis), et l'étude de f permet de conclure à l'existence de L (théorème des valeurs intermédiaires) ; par récurrence, on montre alors que $|u_n - L| \leq k^n |u_0 - L|$, et on conclut.

4 Sommations.

Définition 4. 1. *On appelle* **série associée à la suite** *$u = (u_n)$ la suite $s = (s_n)$ définie par $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.*

Définition 4. 2. *On appelle série* **alternée** *une série associée à une suite de la forme $u_n = (-1)^n a_n$, o- les a_n positifs forment une suite décroissante, de limite 0. Toute série alternée est convergente.*