13. INTÉGRATION

1 Introduction : calculs d'aires.

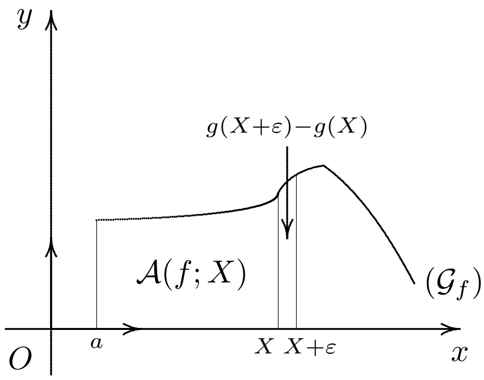
1.1 Aires élémentaires.

La notion de «surface» d'une portion de plan est connue depuis l'antiquité (on pense même que le calcul de la surface des champs est une des origines de la géométrie) ; ce n'est qu'au $19^{\text{ème}}$ siècle qu'on essaya d'en donner une définition rigoureuse. On s'aperçut alors qu'il pouvait se présenter des difficultés inattendues (il n'était pas clair en particulier qu'il y ait une «bonne» mesure de la «surface» dans le cas de formes très irrégulières), ce qui amena à partir de situations intuitivement claires et à définir une «fonction» (l'aire) $S \mapsto \mathcal{A}(S)$ allant des parties du plan (ou du moins de celles assez «simples») vers $\mathbf{R}^+$, et vérifiant certaines propriétés jugées nécessaires (c'est ce qu'on appelle la méthode axiomatique), telles par exemple que : $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow \mathcal{A}(S_1 \cup S_2) = \mathcal{A}(S_1) + \mathcal{A}(S_2)$. On peut alors aisément obtenir les formules classiques donnant par exemple l'aire d'un triangle.

1.2 La définition moderne des intégrales.

En utilisant la même idée, appliquée cette fois à l'aire située entre le graphe d'une fonction f (positive) et l'axe des x, on est amené à encadrer f par des fonctions constantes (par intervalles), et à encadrer l'aire par celle des rectangles correspondants. Il n'est pas très difficile de formaliser cette idée, et de **définir** l'intégrale comme la limite (si elle existe) de ces aires, lorsque la largeur des rectangles tend vers 0. C'est la définition officielle actuelle, et elle sera présentée rigoureusement en Spé ; nous la retrouverons à la fin de ce chapitre, en étudiant le théorème de Riemann.

1.3 La fonction $\mathcal{A}(f;x)$.



Mais nous allons pour le moment utiliser une idée plus «intuitive», due aux efforts des premiers analystes du $17^{\text{ème}}$ siècle (Newton et Leibnitz principalement) : étant donné une fonction f positive sur $[a;b]$, elle consiste à supposer l'existence de l'aire de la portion de plan située entre l'axe Ox et le graphe de f d'une part, et entre les deux droites $[X = a]$ et $[X = x]$ d'autre part (aire que nous noterons $\mathcal{A}(f;x)$). Quand x varie (dans l'intervalle $[a;b]$), ce nombre est donc une fonction de x ($x \mapsto g(x) = \mathcal{A}(f;x)$), et on montre alors «intuitivement» (ce qui sera fait en classe) qu'on doit avoir $g'(x) = f(x)$, et donc que g doit être une primitive de f.

1.4 Aire algébrique.

Plus précisément, si on admet l'existence d'une primitive h de f, on voit qu'on doit avoir $g(x) = h(x) - h(a)$; cette formule peut alors se généraliser à une fonction f quelconque (et non plus seulement positive) et à des valeurs de x inférieures à a. On obtient alors des nombres éventuellement négatifs, mais qui généralisent la notion d'aire avec des conventions de signe qu'on exposera en classe ; on dit qu'on a défini ainsi l'aire *algébrique* d'une portion de plan; cette notion est en fait un peu différente de la précédente, car elle incorpore la notion de contour de la région mesurée (ce contour devant être une courbe paramétrée régulière); une analyse complète de cette notion, et des méthodes de calcul correspondantes, sera faite en Spé.

2 Primitives et intégrales.

2.1 Primitives des fonctions continues.

Pour que la théorie «intuitive» qu'on vient de voir puisse s'appliquer, il faut connaître une primitive de la fonction f. Il est clair que toutes les fonctions n'en ont pas (ainsi, la fonction discontinue $f\colon x \mapsto f(x) = |x|/x$ (si $x \neq 0$) et $f(0) = 0$ ne peut avoir de primitive d'après les théorèmes du chapitre 10); mais on peut démontrer que toute fonction continue sur un intervalle **fermé** $[a, b]$ y admet une primitive (la démonstration de ce théorème délicat, dû à Cauchy, est hors-programme; on l'obtient par une analyse soignée des «sommes de Riemann»); nous ne nous intéresserons plus désormais qu'à ce cas (avec des généralisations presque évidentes qui seront vues en **5.4**). Il est alors facile de voir que si F est une primitive de f sur $[a, b]$, toutes les autres primitives de f sont de la forme $F +$ Constante, ce qu'on a tendance à noter par abus de langage comme (par exemple) $\int x^2\,dx = x^3/3 + \mathrm{C^{te}}$; mais ce genre d'écriture est assez dangereux, ce qui nous amène au problème des notations.

2.2 Intégrales définies : la notation de Leibnitz.

Par une analyse «intuitive» de la notion d'aire «infinitésimale», Leibnitz a été amené à noter ce que nous avons appelé $\mathcal{A}(f; b)$ par l'assemblage de symboles (peu commode) $\int_a^b f(x)\,dx$, qui se lit : «intégrale définie de f sur $[a, b]$», ou plus simplement «somme de a à b de f» (le signe $\int$ est d'ailleurs simplement un S déformé !). Il est plus sage de ne pas trop chercher à décomposer cette écriture; mais nous verrons qu'interpréter dx comme «le même» dx que celui figurant dans $\dfrac{d}{dx}f(x)$ peut s'avérer commode.

Quoiqu'il en soit, nous allons simplement prendre comme définition «arbitraire» de $\int_a^b f(x)\,dx$ le nombre $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a, b]$, et on se convaincra aisément que cette définition ne dépend pas du choix de F (la constante s'éliminant); a et b s'appellent les bornes d'intégration. On remarquera que x n'intervient pas dans cette notation, autrement dit que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ (on dit que x est une variable «muette»).

On utilise parfois dans les calculs pratiques d'intégrales la notation $F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$, ou encore $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ (on dit qu'on «prend F entre a et b»).

Il arrive aussi qu'on veuille «intégrer sur un intervalle» I dont on ne connait pas explicitement l'ordre des bornes : $I = \begin{cases} [a, b] & \text{si } a < b \\ [b, a] & \text{si } b \leq a \end{cases}$ (on verra en Spé qu'il s'agit d'un cas particulier d'intégrale «sur un domaine»); on définit alors $\displaystyle\int_I f = \int_c^d f(x)\,dx$, avec $c = \min(a, b)$ et $d = \max(a, b)$; on remarquera que dans cette notation, la variable muette et le «d» associé ont disparus.

Il est clair que la fonction $x \mapsto F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f (celle qui vaut 0 en a); d'où l'idée de noter $\int f(x)\,dx$ une primitive «arbitraire» de f (on dit alors qu'il s'agit d'une intégrale indéfinie). Mais cette notation suppose une constante (dite constante d'intégration) arbitraire, elle est donc dangereuse et ne doit être employée que pour noter des résultats (comme nous le ferons au prochain paragraphe) ; les calculs explicites d'intégrales (et même de primitives) doivent être faits en conservant les bornes d'intégration (on verra pourquoi en étudiant la technique des changements de variable). Dans tous les cas où l'on veut pouvoir parler des primitives de f sans risque, on emploiera la notation $\operatorname{Prim}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \;/\; F' = f\}$.

2.3 Propriétés élémentaires.

En n'utilisant que la définition précédente, on obtient aisément la formule de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(on remarquera qu'il n'est pas nécessaire d'avoir $a < b < c$) ; les propriétés élémentaires de la dérivée montrent aussi la formule

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \text{ (où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes)}$$

qu'on appelle la linéarité de l'intégration (on verra précisément pourquoi au chapitre 19). Malheureusement, il n'y a pas de formule analogue pour $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, et on verra dans la prochaine section qu'il n'est pas possible en général de calculer explicitement la primitive de n'importe quelle fonction, même élémentaire.

3 Calculs de primitives.

3.1 Primitives des fonctions usuelles.

La liste des dérivées des fonctions usuelles donne, lue «à l'envers», une liste de primitives, rappelées dans le tableau ci-dessous :

Fonction		Primitive
$\int x^\alpha\,dx$	$=$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{C^{te}}$ (si $\alpha \neq -1$)
$\int \dfrac{dx}{x}$	$=$	$\ln x + \mathrm{C^{te}}$
$\int e^{kx}\,dx$	$=$	$\dfrac{e^{kx}}{k} + \mathrm{C^{te}}$
$\int \sin(ax+b)\,dx$	$=$	$\dfrac{-\cos(ax+b)}{a} + \mathrm{C^{te}}$
$\int \cos(ax+b)\,dx$	$=$	$\dfrac{\sin(ax+b)}{a} + \mathrm{C^{te}}$
$\int \dfrac{dx}{1+x^2}$	$=$	$\operatorname{Arc\,tg} x + \mathrm{C^{te}}$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$=$	$\operatorname{Arc\,sin} x + \mathrm{C^{te}}$

D'autres primitives de fonctions usuelles seront obtenues dans les prochains paragraphes, mais il n'est pas recommandé de les apprendre par cœur ; il vaut mieux retenir les «trucs» permettant de les retrouver.

3.2 Intégration par parties.

Comme on l'a dit plus haut, il n'y a pas à proprement parler de «formule» pour calculer $\int f(x)g(x)\,dx$, mais il est possible de transformer les intégrales de ce type; en effet, en «intégrant» la formule $(UV)' = U'V + UV'$, et en notant $u = U'$, $v = V'$, on obtient la relation suivante, appelée «formule d'intégration par parties» :

$$\int_a^b u(x)V(x)\,dx = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b U(x)v(x)\,dx$$

(que l'on note souvent aussi, par abus de langage et en employant les «changements de variable» du prochain paragraphe : $\int u\,dv = uv - \int v\,du$).

La mise en œuvre de cette formule sera vue en classe; il est clair que pour l'utiliser pour déterminer la primitive d'un produit, il faut non seulement connaître la primitive d'un des deux facteurs, mais aussi que la transformation de l'intégrale aboutisse à une forme plus simple, ce qui demande parfois beaucoup d'habileté pratique. On est souvent aussi amené à utiliser plusieurs fois de suite cette formule (par exemple pour le calcul de $\int_0^1 x^4 e^x\,dx$), et même à construire une récurrence (l'exemple le plus célèbre étant la formule de Taylor-Young, qu'on verra en **6.1**)

3.3 Changement de variable.

La formule de dérivation des fonctions composées ($(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$) donne elle aussi des formules d'intégration, qu'on interprète plus aisément en disant qu'on effectue le «changement de variable» consistant à poser $X = f(x)$; un calcul simple aboutit à la formule

$$\int_a^b f'(x)g(f(x))\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(X)\,dX$$

Mais cette formule cache des difficultés pratiques bien réelles : la forme de gauche n'est pas en général donnée de manière aussi évidente ! Aussi, si l'on peut par exemple l'utiliser pour calculer $\int xe^{-x^2}\,dx$ (qui vaut $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + \mathrm{C^{te}}$), on aura le plus souvent une transformation de la forme de droite, autrement dit on essaiera de poser $x = f^{-1}(X)$ et alors, cette méthode suppose que la fonction de «changement de variable» soit bijective (et même dérivable !). On utilisera donc plutôt la forme suivante : si φ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, posant (changement de variable) $x = \varphi(t)$, il vient :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

qu'on retient plus aisément en notant $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$ (ce qui, bien sûr, est l'une des justifications historiques de la notation de Leibnitz).

Quand on veut utiliser cette méthode pour obtenir une primitive, on se place le plus souvent dans le cas où la fonction φ utilisée est en fait connue sous la forme $t = \psi(x)$ (et donc où $\varphi = \psi^{-1}$); on aura donc besoin le plus souvent de bijections dérivables, dont la bijection réciproque est aussi dérivable; une telle bijection s'appelle un *difféomorphisme.*

De nombreux changements de variable sont a priori envisageable; on verra dans la section suivante un ensemble de techniques classiques. En l'absence d'indications fournies par ailleurs, et quand les changements de variable «naturels» n'aboutissent pas, il ne faut pas perdre trop de temps : de nombreuses fonctions élémentaires n'ont pas de primitive «exprimable» ; on a déja vu que $1/x$ et $1/1+x^2$ nécessitent l'introduction des nouvelles fonctions ln et Arc tg, voici d'autres exemples :

3.4 Fonctions sans primitives «élémentaires».

Des fonctions aussi naturelles que $\dfrac{1}{\ln x}$, $\dfrac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, ou encore $x^\alpha e^x$ (pour $\alpha \notin \mathbf{N}$) n'ont pas de primitive donnée par une formule «sans signe $\int$». Certaines de ces primitives réapparaissant dans de nombreuses situations, elles ont parfois fini par recevoir un nom (les logiciels tels que Maple V connaissent d'ailleurs une très longue liste de ces noms) et être étudiées précisément à l'aide des méthodes de **6.2** (ainsi la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_e^x \frac{dt}{\ln t}$ a été appelé par Gauss le «logarithme intégral» et noté $\mathrm{Li}(x)$, et il a conjecturé que le nombre de nombres premiers avant n était équivalent à $\mathrm{Li}(n)$). Il s'agit de ce qu'on appelle parfois les fonctions «spéciales» ; elles forment un réservoir inépuisable de sujets de concours, commençant généralement par la phrase rituelle : «on ne cherchera pas à expliciter l'intégrale...». Si l'on dispose d'un logiciel de calcul formel, on remarquera qu'il ne peut en général calculer une intégrale de ce genre sans faire apparaître certaines de ces fonctions spéciales (ainsi, $\int \sqrt{2-\sin^2 x}\, dx$ a (sous Maple) une réponse comportant de mystérieuses fonctions LegendreY...), et on assiste même parfois à un aveu d'impuissance complète (la commande `int (exp (x^3), x) ;` renvoie l'intégrale $\int e^{x^3}\, dx$, comme si on avait tapé `Int (exp...)`; c'est (le plus souvent) le signe qu'il n'y a effectivement pas de «solution» élémentaire !

4 Méthodes pratiques.

4.1 Fonctions rationnelles.

Toutes les fonctions rationnelles $x \mapsto P(x)/Q(x)$ (où P et Q sont des polynômes) ont des primitives «exactes». La démonstration rigoureuse de ce résultat sera faite dans le prochain interlude; nous allons voir ici les cas les plus courants, et les méthodes de calcul correspondantes. On commence par se ramener au cas où $\deg(P) < \deg(Q)$ en effectuant une division euclidienne : si $P = AQ+R$, on a $P/Q = A+R/Q$; et comme on connaît les primitives des polynômes (car $\displaystyle\int \sum_{k=0}^n a_k x^k\, dx = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \mathrm{C^{te}}$), on n'a donc qu'à chercher une primitive de R/Q. On factorise alors Q, et on effectue ce qu'on appelle une **décomposition en éléments simples** de R/Q, c'est-à-dire qu'on écrit R/Q sous forme d'une somme de termes de la forme $\dfrac{a}{(x-\alpha)^n}$ (qu'on appelle des *éléments simples de première espèce*) et de termes de la forme $\dfrac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$, avec $\beta^2 < 4\gamma$ (qu'on appelle des *éléments simples de seconde espèce*). On verra dans l'interlude que c'est toujours possible, et de manière unique; et comment le faire en pratique. Il ne reste alors qu'à obtenir les primitives des éléments simples : ceux de première espèce sont aisément intégrables, puisque $\displaystyle\int \frac{a\,dx}{x-\alpha} = a\ln(x-\alpha)+\mathrm{C^{te}}$, et que $\displaystyle\int a(x-\alpha)^k\, dx = \frac{a(x-\alpha)^{k+1}}{k+1} + \mathrm{C^{te}}$; mais les éléments de seconde espèce nécessitent une méthode plus détournée : on commence par se ramener à la forme $\dfrac{aX+b}{(X^2+1)^n}$, à l'aide du changement de variable $X = c_1 x + c_2$ (on verra le détail du calcul en classe), la forme $\dfrac{aX}{(X^2+1)^n}$ s'intègre aisément; il reste donc à déterminer les primitives de $\dfrac{1}{(X^2+1)^n}$; ce qui se fait par intégration par parties, et à l'aide d'une récurrence sur n (d'ailleurs non évidente, et qui sera précisée en exercice).

4.2 Exponentielles.

Les fonctions contenant des exponentielles se ramènent en général à des fractions rationnelles par le changement de variable $t = e^x$, en effet on a alors $dt = t\,dx$. On pourra parfois accélérer les calculs en exploitant les fonctions hyperboliques, qui se traitent de manière analogue (généralement au signe près) aux fonctions trigonométriques usuelles.

4.3 Fonctions trigonométriques.

Les polynômes trigonométriques (par exemple $\cos^3 x \sin^4 x$) s'intègrent en général après linéarisation (c'est-à-dire en les mettant sous la forme $\sum a_k \cos kx$), ce qui se fait à l'aide des formules d'Euler. On peut les utiliser plus généralement pour des fonctions trigonométriques quelconques (et passer par l'exponentielle complexe, en séparant parties réelles et imaginaires), mais il est le plus souvent plus commode d'utiliser directement les changements de variable $X = \cos x$, $X = \sin x$ ou $X = \tan x$ (le choix exact nécessitant un peu d'intuition, ou l'utilisation des «règles de Bioche» : $X = \cos x$ si f est impaire, $X = \sin x$ si $f(\pi - x) = -f(x)$ et $X = \tan x$ si $f(\pi + x) = f(x)$, que l'on peut retrouver en pensant aux «symétries» de la fonction étudiée). Il faut être très soigneux dans l'application de cette méthode, car elle doit être limitée à des intervalles où ces fonctions sont bijectives ! Quand aucun de ces changement de variable ne réussit, le choix de $t = \tan(x/2)$ aboutit toujours, comme on le verra en classe (mais les calculs sont souvent nettement plus pénibles, d'où l'intérêt des méthodes plus simples qu'on a vues d'abord) ; c'est en particulier le cas du calcul de $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$; en voici une rédaction soignée :

Plaçons-nous sur l'intervalle $]0;\pi[$, et posons $t = \tan(x/2)$ et donc (dans cet intervalle) $x = \varphi(t) = 2\,\mathrm{Arc\,tg}\,t$; φ est un difféomorphisme et $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$. On a alors, d'après la formule de changement de variable,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{dx}{\sin x} = \int_1^{\mathrm{tg}\,\frac{X}{2}} \frac{2dt}{1+t^2}\Big/\frac{2t}{1+t^2} = \int_1^{\mathrm{tg}\,\frac{X}{2}} \frac{dt}{t} = \ln \mathrm{tg}\,\frac{X}{2},$$

et donc les primitives de $\dfrac{1}{\sin x}$ (sur l'intervalle $]0;\pi[$) sont de la forme $\ln \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} + \mathrm{C^{te}}$.

On remarquera sur cet exemple que si déterminer une primitive peut devenir assez délicat, il est facile en revanche de contrôler le résultat : on voit aisément que

$$(\ln \mathrm{tg}\,\frac{x}{2})' = \frac{1+\mathrm{tg}^2\,x/2}{2\,\mathrm{tg}\,x/2} = \frac{\sin x/2}{2\cos x/2} + \frac{\cos x/2}{2\sin x/2} = \frac{1}{2\sin x/2\cos x/2} = \frac{1}{\sin x},$$

ce qui prouve d'ailleurs que ce résultat est valable dans tous les intervalles où $\sin x \neq 0$.

4.4 Radicaux.

Les fonctions contenant des radicaux «simples» de la forme $\sqrt{ax+b}$ ou même $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ s'intègrent en prenant le radical comme nouvelle variable. Les radicaux d'expressions plus complexes sont souvent difficiles à intégrer ; on verra en classe quelques méthodes généralement efficaces : pour les expressions du type $\sqrt{ax^2+bx+c}$, le principe est de se ramener (par passage à la forme canonique) à des formes telles que $\sqrt{\pm X^2 \pm 1}$, puis de transformer ces dernières en utilisant la trigonométrie ou les fonctions hyperboliques. Comme toujours, il n'y a pas de solution universelle pour tous les problèmes de ce type : on ne peut mettre sous forme «élémentaire» $\int \sqrt{x^4+1}\,dx$ (c'est ce qu'on appelle une intégrale elliptique).

5 Théorie de l'intégration.

5.1 Inégalités et encadrements.

On va commencer par démontrer un résultat élémentaire : si (sur $[a;b]$) $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. En effet, la dérivée f de F étant positive, F est croissante sur $[a;b]$, ce qui prouve que $F(b) - F(a) \geq 0$. On en déduit que

$$(\forall x \in [a;b])(f(x) \leq g(x)) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Comme on sait que pour tout x, $-|x| \leq x \leq |x|$, on en déduit aisément l'importante inégalité

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(qui peut même se généraliser au cas complexe ($f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$), comme on le verra en Spé).

5.2 Méthode des rectangles.

En particulier, on voit que si $m = \min\limits_{[a;b]} f$ et si $M = \max\limits_{[a;b]} f$, on doit avoir

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$

or les deux bornes de cet encadrement constituent l'aire de deux rectangles situés respectivement en-dessous et au dessus du graphe de f. En décomposant l'intervalle $[a;b]$ en une suite d'intervalles plus petits, et en combinant les inégalités, on aboutit à un encadrement de $I = \int_a^b f(x)\,dx$ par des sommes. Le calcul ainsi esquissé peut, dans des conditions favorables, donner une bonne valeur approchée de I, mais il existe des méthodes numériques de calcul de I plus efficaces, comme on le verra au chapitre 15. Toutefois, on va voir qu'il permet un passage à la limite donnant une valeur exacte de I, et qui a d'ailleurs servi à Cauchy à justifier rigoureusement l'existence d'une primitive de f.

5.3 Sommes de Riemann.

Supposons pour commencer que f soit croissante sur $[a;b]$; dans tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, on aura alors $\min\limits_{[c;d]} f = f(c)$ et $\max\limits_{[c;d]} f = f(d)$; l'encadrement précédent s'écrira donc

$$f(c)(d-c) \leq \int_c^d f(x)\,dx \leq f(d)(d-c).$$

Si on décompose alors $[a;b]$ en une suite de n intervalles **de même longueur** (égale par conséquent à $(b-a)/n$) : $[a;a+(b-a)/n]$, $[a+(b-a)/n;a+2(b-a)/n]$, ..., $[a+(n-1)(b-a)/n;b]$; et qu'on additionne les encadrements qu'on vient d'obtenir, on peut mettre en facteur la valeur constante $d-c=(b-a)/n$, et en posant $a_i = a+i(b-a)/n$, on obtient finalement

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

Les bornes de l'encadrement s'appellent des *sommes de Riemann* (à pas constant); en notant $S_1(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$ et $S_2(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$, on voit que les deux suites $S_1(n)$ et $S_2(n)$ vérifient $(I - S_1(n)) + (S_2(n) - I) \leq \frac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a))$, ce qui prouve qu'elles convergent toutes deux vers I. Un résultat analogue peut se démontrer pour une fonction quelconque (continue) et non plus seulement monotone (mais on ne peut plus alors encadrer I) :

Théorème (Riemann). *La suite* $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$ *est convergente, et a pour limite* $\int_a^b f(x)\,dx$.

En fait, si cette démarche peut sembler naturelle, et est historiquement celle qui fut suivie, on estime actuellement qu'il est préférable de définir l'intégrale à partir des sommes de Riemann (dont la généralisation est possible à des fonctions extrêmement discontinues, et bien sûr n'admettant pas de primitives; on aboutit ainsi à ce qu'on appelle la *théorie de la mesure*); on montre alors que pour une fonction continue, ces sommes convergent vers une limite, que l'on baptise intégrale définie; il reste alors à montrer le
Théorème fondamental de l'analyse (Cauchy) : *Si f est continue sur I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(x)\,dx$ (définie sur I, avec $a \in I$) est une primitive de f.*

Il y a de nombreuses applications pratiques du théorème de Riemann; on pensera surtout qu'on peut souvent exprimer une suite sous forme de «somme de Riemann», même quand les bornes ne semblent pas tout à fait convenir : on en verra des exemples en exercice.

5.4 Généralisation aux fonctions continues par intervalles.

Il est temps d'envisager l'intégration de fonctions non continues. Comme on l'a vu, elles ne sauraient avoir de primitives, mais si une fonction est continue sur les intervalles $[a;b[$ et $]b;c]$, et si de plus elle a des limites en b à droite et à gauche (même si $\lim_{b^-} f \neq \lim_{b^+} f$), il parait naturel d'utiliser la formule de Chasles pour définir $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^c f_2(x)\,dx$, où f_1 et f_2 sont les fonctions prolongeant f par continuité. Le cas général des fonctions «continues par intervalles» (et ayant des limites finies aux bornes) ne présente pas plus de difficultés; il offre l'intérêt théorique de vérifier encore le théorème de Riemann (et c'est d'ailleurs ce qui a donné à ce dernier l'idée de définir une intégrale plus générale, et qui peut s'appliquer aussi à des fonctions très discontinues)

5.5 Formule de la moyenne.

Puisque par définition, la primitive F de f est dérivable, on peut lui appliquer la formule des accroissements finis sur $[a;b]$, ce qui aboutit à $(F(b)-F(a))/(b-a) = f(c)$ ou plus précisément à la *formule de la moyenne* :

$$(\exists c)(a < c < b \quad \text{et} \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)).$$

Le nombre $f(c)$ ainsi défini s'appelle la *valeur moyenne de* f (sur $[a;b]$) (pour des raisons surtout «physiques», que l'on verra en exercice); on généralise d'ailleurs cette formule à d'autres notions de moyennes (moyenne géométrique, etc.. .) par des définitions «analogues» qui conduisent aux importantes notions (physiques) de moyenne pondérée, de distribution de densité, et de mesure.

f étant continue sur $[a;b]$, elle y atteint ses bornes, et on peut donc écrire l'*inégalité de la moyenne* :

$$\min_{[a;b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{[a;b]} f$$

Cette inégalité est d'ailleurs très imprécise, mais suffisante pour les encadrements les plus fréquents, tel celui que nous allons voir en **6.1**, ainsi qu'une autre utilisation importante, la construction d'encadrements de primitives qu'on ne sait pas expliciter pour déterminer leurs limites, qu'on verra en **6.2**.

6 Applications.

6.1 Formule de Taylor-Young.

Intégrons par parties $I_n = \int_a^b f(x)(b-x)^n/n!\,dx$. On obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{-(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}f(x)\right]_a^b + \int_a^b f'(x)\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\,dx \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f(a) + \int_a^b f'(x)\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\,dx, \end{aligned}$$

ce qui donne l'idée d'une récurrence en partant de $I_0 = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. On obtient alors la *formule de Taylor avec reste intégral (ou reste de Young)* (à l'ordre n) :

$$F(b) = F(a) + (b-a)F'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}F''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a) + R_n$$
$$\text{avec } R_n = \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}F^{(n+1)}(x)\,dx$$

(Il est clair que cette formule est valable si l'intégrale est définie; il suffit par exemple que F soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.)

R_n s'appelle le reste de Young (d'ordre n); dans les applications pratiques, on ne peut en général l'évaluer plus simplement, mais il est souvent possible de l'encadrer (par exemple à l'aide de l'inégalité de la moyenne); en particulier, si $F^{(n+1)}$ est bornée (sur $[a;b]$) par m et M, on obtient

$$m\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

d'où on peut retrouver la formule de Taylor-Lagrange.

6.2 Étude de fonctions définies par une intégrale.

Un ensemble important de fonctions «usuelles» ne peuvent être définies que par des intégrales (c'est par exemple le cas des solutions de certaines équations différentielles que l'on verra au prochain chapitre). L'étude d'une fonction telle par exemple que $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$ (développée dans l'exercice-type n° 27) nécessite une démarche un peu inhabituelle : on vérifiera en effet que le calcul de la dérivée de f (ici égale à $2/\ln 2x - 1/\ln x$) est souvent beaucoup plus facile que le reste de l'étude. On réfléchira en particulier aux problèmes de limites (qui seront abordés de manière plus systématique en Spé), et on soignera les questions de domaine et de symétrie; enfin on évitera surtout de chercher (le plus souvent en vain) une formule explicite.

6.3 Deux exemples classiques : les formules de Wallis et de Stirling.

Outre les limites liées à l'application directe des sommes de Riemann, certaines suites correspondent à des «formules des rectangles», ce qui permet de les comparer à des intégrales. Ainsi, on voit que la méthode des rectangles appliquée à la fonction $x \mapsto 1/x$ conduit à $1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n < \ln n < 1 + 1/2 + \cdots < 1/(n-1)$; et c'est une traduction de cette idée qui amène à la «constante d'Euler» (voir le DM correspondant). On va ici s'intéresser à un encadrement analogue de $\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$, ce qui nous conduira à une formule approchée pour $n!$, qu'on appelle la formule de Stirling.

La fonction $f\colon x \mapsto \ln x$ étant croissante, concave, on sait d'abord (méthode des rectangles) que $f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) < \int_1^n \ln x\,dx < f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)$, mais aussi (méthode «des trapèzes») que

$$\frac{f(1)+f(n)}{2} + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) < \int_1^n \ln x\,dx < f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

(Cet encadrement sera précisé en classe, il consiste à intégrer une fonction affine par morceaux et valant $\ln x$ pour x entier.) On voit par conséquent que, $\int_1^n \ln x\,dx$ valant $\big[x\ln x - x\big]_1^n = n\ln n - n + 1$, on obtient l'encadrement suivant : $n\ln n - n + 1 < \ln n! < n\ln n - n + \ln\sqrt{n} + 1$.

Malheureusement, cet encadrement n'est pas assez précis; en effet, si les deux bornes sont bien équivalentes, ce qui, d'après le théorème des gendarmes, permet d'affirmer que $\ln n! \sim n\ln n$, on aboutit en passant aux exponentielles à l'encadrement «flou» $n^n/e^n < n! < n^n/e^n \times e\sqrt{n}$, qui ne permet pas de donner un équivalent à $n!$. Toutefois, la piste est à présent suffisamment indiquée : il faut déterminer un encadrement plus «serré», par exemple celui fourni par la «méthode de Simpson» (voir chapitre 14). Il s'avère alors que (comme pour le calcul de la constante d'Euler) on obtient un résultat de la forme : $\ln n! - n\ln n + n - \ln n/2$ est convergente (vers a), et donc que $n! \sim Kn^n e^{-n}\sqrt{n}$, où $K = e^a$ est une constante (non nulle)*. Mais comment la déterminer ?

---

* En réalité, ce type d'encadrement ne permet pas d'aboutir à la convergence; l'idée la plus rapide pour la démontrer consiste à avoir «deviné» le résultat (comme on vient de le voir), puis à introduire deux suites telles que $u_n = \ln n! - n\ln n + n - \ln n/2$ et $v_n = u_n + k/n$, et à ajuster k pour que les deux suites u_n et v_n soient adjacentes; cette méthode désagréablement artificielle se généralise en fait à un résultat théorique important : la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin.

Changeons apparemment de sujet ; nous allons à présent nous intéresser à la suite $I_n = \int_0^\pi \sin^n x\,dx$. Par intégration par parties, on voit que

$$I_n = \left[\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Cette formule permet par conséquent de calculer I_n de proche en proche : on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. En multipliant ces égalités, on aboutit à

$$I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} I_0 \quad \text{et à} \quad I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} I_1.$$

Il est d'autre part facile de montrer (en encadrant les intégrales) que I_n est une suite décroissante telle que $\lim I_{n+1}/I_n = 1$; remarquant enfin que $I_0 = \pi$ et que $I_1 = 2$, on aboutit à la *formule de Wallis* :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n-2 \times 2n \times 2n}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times \cdots \times 2n-1 \times 2n-1 \times 2n+1}.$$

Or cette formule peut s'exprimer comme un quotient de factorielles ! Un simple exercice de calcul de limites suffit alors pour déterminer la constante K qui manquait plus haut et obtenir la **formule de Stirling** :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Exercices

1 Méthodes de calcul.

1 ($\star\star$) Calculer les intégrales et primitives suivantes :

$$\int_1^e x^n \ln x\,dx \quad ; \quad \int_1^e \sin \ln x\,dx \quad ; \quad \int x^2 \operatorname{Arc\,tg} x\,dx$$

2 ($\star\star$) Calculer les intégrales et primitives suivantes :

$$\int x e^{\sqrt{x}} dx \quad ; \quad \int \sqrt{\frac{\operatorname{Arc\,sin} x}{1-x^2}}\,dx \quad ; \quad \int x^m (\ln x)^p\,dx$$

(On exprimera la dernière sous forme d'une relation de récurrence)

3 ($\star\star\star$) Intégrer $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$ en posant $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$

(Rédiger soigneusement le changement de variable).

4 ($\star\star\star$) Intégrer $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}$ en posant $\sqrt[3]{x^3+x^2} = tx$.

2 Calculs d'intégrales classiques.

5 ($\star$) Calculer

$$\int \frac{x^4+x^2+1}{x-2}\,dx \quad , \quad \int \frac{3x+4}{2x^2-1}\,dx \quad , \quad \int \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx$$

6 ($\star\star$) Calculer

$$\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}\,dx \quad , \quad \int \frac{dx}{x^4+x^2} \quad , \quad \int \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$$

7 ($\star\star$) Calculer

$$\int \frac{e^x}{\operatorname{sh} x}\,dx \quad , \quad \int \frac{dx}{\sin x+\cos x} \quad , \quad \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

8 ($\star\star\star$) Calculer

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{(4+4x-x^2)^{3/2}}$$

3 Propriétés générales.

9 ($\star\star$) Montrer que $\left|\int_0^1 (f(x)+g(x))\,dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)|\,dx.$

10 ($\star\star\star$) Utiliser la méthode des rectangles pour encadrer $u_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ par deux intégrales. En déduire que la suite $u_n(\alpha)$ est convergente pour $\alpha < -1$.

> **T 25** Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie (pour $n \geq 1$) par :
>
> $$s_n = \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k.$$
>
> Déterminer $\lim_{n\to+\infty} s_n$ (on pourra exprimer s_n à l'aide d'une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto x\ln x$).

11 ($\star\star$) Déterminer la limite de la suite u_n définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sin(k\pi/n)$. Vérifier le résultat en calculant directement la somme des sinus.

> **T 26** Soit $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $I_n = \int_0^{\pi/4}(\tan x)^n\,dx$. Calculer $I_n + I_{n+2}$ et en déduire les valeurs de I_{2n} sous forme d'une somme (on pourra calculer de deux manières $\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k(I_{2k}+I_{2k+2})$). Montrer que la suite I_n est strictement décroissante, et déterminer sa limite. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \pi/4.$

12 ($\star$) Montrer que si f est continue sur un voisinage de a, $\lim_{x\to a} \int_a^x \frac{f(t)}{x-a}\,dt = f(a)$.

13 ($\star\star$) Est-il vrai que si $f \underset{0}{\ll} g$, on ait $\int_0^x f(t)\,dt \underset{0}{\ll} \int_0^x g(t)\,dt$? Formuler une question analogue en $+\infty$, et tenter d'y répondre.

14 ($\star\star$) Justifier la règle d'intégration des DL qui a été donnée au chapitre 11.

T 27 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$. Déterminer le domaine et les variations de f, ainsi que les limites aux bornes du domaine.

15 ($\star\star\star$) Déterminer la limite, quand x tend vers 0, de

$$f(x) = \int_{-x/2}^{x/2} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$$

(on posera $t = x \sin u$, et on encadrera l'intégrale obtenue).

16 ($\star\star\star$) Montrer que la suite $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{n^2}{k^2-n^2}\right)$ est convergente (on rappelle que $\exp(x) = e^x$).

13. INTÉGRATION

Plan

13. INTÉGRATION.

(Formulaire)

1 Définitions générales, propriétés élémentaires.

Définition 1. 1. *On dit que F est une* **primitive** *de f sur un intervalle I si F est dérivable (sur I) et si f est la fonction dérivée de F (sur I). On note* $\mathrm{Prim}(f)$ *l'ensemble des primitives de f.*

Si f est continue sur I, elle possède des primitives (Cauchy), et si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, $F_2 = F_1 + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$.

Définition 1. 2. *Si F est une primitive de f sur un intervalle I contenant a et b, on appelle* **intégrale définie** *de f (de a à b) et on note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ (o- x est une lettre muette) le nombre $F(b) - F(a)$ (qui ne dépend pas de la primitive choisie), que l'on note parfois (dans les calculs intermédiaires) $F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$. Si $J = [\![c, d]\!]$ (avec $c < d$) est un intervalle contenu dans I, on appelle aussi* **intégrale de f sur l'intervalle** *J le nombre $F(d) - F(c)$, et on le note $\displaystyle\int_J f$.*

On a (si les différentes intégrales sont définies) :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(formule de Chasles)
et :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \ (\alpha \text{ et } \beta \text{ constantes})$$

(linéarité de l'intégration).

2 Méthodes d'intégration.

Définition 2. 3. *On appelle* **intégration par parties** *de la fonction $F(x)g(x)$ la formule de transformation*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx,$$

o- F et G sont des primitives de f et g.

Définition 2. 4. *Si φ est une bijection dérivable sur un intervalle contenant a et b (et en pratique, on suppose souvent que φ^{-1} est aussi dérivable, et on dit alors que φ est un* **difféomorphisme***), on a la* **formule de changement de variables** *:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

3 Primitives usuelles.

Il est conseillé de retenir

Fonction		Primitive
$\int x^\alpha\, dx$	$=$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ (si $\alpha \neq -1$)
$\int \dfrac{dx}{x}$	$=$	$\ln x + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$
$\int e^{kx}\, dx$	$=$	$\dfrac{e^{kx}}{k} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$
$\int \sin(ax+b)\, dx$	$=$	$\dfrac{-\cos(ax+b)}{a} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$
$\int \cos(ax+b)\, dx$	$=$	$\dfrac{\sin(ax+b)}{a} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$
$\int \dfrac{dx}{1+x^2}$	$=$	$\mathrm{Arc\,tg}\, x + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$
$\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}$	$=$	$\dfrac{1}{a}\, \mathrm{Arc\,tg}\, \dfrac{x}{a} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$=$	$\mathrm{Arc\,sin}\, x + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$

Les fractions rationnelles (quotients de polynômes) s'intègrent (en général) par décomposition en éléments simples, suivie, pour les éléments de seconde espèce, de la mise sous forme canonique :

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\, dx + k \int \frac{dX}{X^2+c^2}$$

(o- X est donné par le changement de variable $X = x + p/2$).

Les expressions contenant des radicaux du premier degré ($\sqrt{ax+b}$ ou $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$) s'intègrent en prenant ces radicaux comme nouvelle variable; de même, on posera $X = e^x$ pour intégrer des expressions ne contenant que des exponentielles. Les expressions trigonométriques s'intègrent en utilisant («règles de Bioche») $X = \cos x$ si f est impaire, $X = \sin x$ si $f(\pi - x) = -f(x)$ et $X = \tan x$ si $f(\pi + x) = f(x)$ (il n'est pas indispensable de connaître ces règles par cœur, elles servent seulement à gagner du temps). Si aucun changement de ce type ne suffit, on utilisera les «formules en t». Il est utile de savoir en particulier que

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan(x/2) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

Enfin, les expressions contenant des radicaux du second degré sont d'abord mises sous forme canonique, pour se ramener à des formes telles que $\sqrt{\pm X^2 \pm 1}$, puis on utilise (suivant les cas) $X = \sin u$, $X = \mathrm{ch}\, u$ ou $X = \mathrm{sh}\, u$.

⋆

⋆ ⋆

⋆

4 Théorie de l'intégration.

Si $a < b$, on a

$$(\forall x)(a < x < b \Rightarrow f(x) \leq g(x)) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(comparaison des intégrales définies).

En particulier, si f est croissante sur $[a, b]$, on a la «formule des rectangles» :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Définition 4. 5. *Si f est définie sur $[a, b]$, on appelle* **somme de Riemann** *associée à f (à pas constant $p = (b-a)/n$) le nombre*

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Définition 4. 6. *On généralise la notion d'intégrales aux fonctions continues par intervalles par la formule suivante : si f est continue sur la suite d'intervalles $]a = a_0, a_1[$, $]a_1, a_2[$, ..., $]a_{n-1}, a_n = b[$, et si f peut se prolonger par continuité dans chacun de ces intervalles (on dit alors que f est* **continue par intervalles** *sur $[a, b]$, on pose*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(x)\,dx$$

o- f_i désigne le prolongement par continuité de f à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.

Théorème (Riemann). *Si f est continue par intervalles sur $[a, b]$, et si S_n est la somme de Riemann associée à f (de pas $(b-a)/n$), la suite S_n converge vers $\int_a^b f(x)\,dx$.*

On peut aussi **définir** l'intégrale comme la limite (si elle existe) des sommes de Riemann (quand n tend vers l'infini); on démontre que c'est en particulier le cas si f est continue, et alors le résultat précédent (devenu une définition) permet de démontrer le

Théorème fondamental de l'analyse (Cauchy). *Si f est continue sur I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(x)\,dx$ (définie sur I, avec $a \in I$) est une primitive de f.*

Pour les fonctions continues sur $[a, b]$, on a la *formule de la moyenne* :

$$(\exists c)(a < c < b \quad \text{et} \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)).$$

d'o- on tire l'*inégalité de la moyenne* :

$$\min_{[a;b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{[a;b]} f$$

En intégrant par parties $I_n = \int_a^b f(x)(b-x)^n/n!\,dx$, on obtient par récurrence la *formule de Taylor avec reste intégral (ou reste de Young)* (à l'ordre n) :

$$F(b) = F(a) + (b-a)F'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}F''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a) + R_n$$

$$\text{avec } R_n = \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}F^{(n+1)}(x)\,dx$$

(pour que cette formule soit valable, il suffit que l'intégrale soit définie et par exemple que F soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.)