COMPLÉMENTS SUR LES FRACTIONS RATIONNELLES

(INTERLUDE)

1 Décomposition en éléments simples.

1.1 Partie principale.

Rappelons d'abord qu'on note $\mathbf{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients réels, et $\mathbf{C}(X)$ celui des fractions rationnelles à coefficients complexes. Si la fraction $F(X) = P(X)/Q(X)$ est donnée sous forme irréductible (c'est-à-dire que P et Q n'ont pas de facteurs communs), on dit que les racines de P sont des *zéros* de F, et que les racines de Q sont des *pôles* de F, avec les mêmes définitions de multiplicité que pour les polynômes. (Ainsi, on dira que -2 est un pôle triple de $(X^2+1)/X(X+2)^3$). Dans $\mathbf{C}(X)$, les seules fractions sans pôles sont les polynômes (on dit encore que ce sont des fonctions *entières*). Toute fraction rationnelle peut s'écrire de manière unique comme somme d'un polynôme (appelé sa *partie principale*), et d'une fraction R/Q telle que le degré de R soit inférieur (strictement) au degré de Q ; nous n'allons chercher à décomposer que des fractions «sans partie principale».

1.2 Décomposition dans C.

Plaçons nous d'abord dans $\mathbf{C}$; d'après le théorème de d'Alembert, on peut écrire Q (de manière unique à l'ordre des facteurs près) sous la forme $\prod_{k=0}^{p}(X-\alpha_k)^{n_k}$, où les α_k sont les pôles de F (et les n_k leurs multiplicités). Montrons que si $F = P/Q$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$, on peut écrire de manière unique $F = P_1/(X-\alpha_0)^{n_0} + P_2/Q'$, où α_0 n'est pas racine de Q' (on vérifie aisément qu'on doit avoir $Q' = \prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{n_k}$.) En effet, $A = (X-\alpha_0)^{n_0}$ et Q' sont premiers entre eux; d'après le théorème de Bezout (voir chapitre 5), il existe donc des polynômes C et D tels que $AC+Q'D = 1$; le résultat annoncé plus haut s'en déduit aisément, en prenant $P_1 = DP$ et $P_2 = CP$. (Mais cette solution est inutilisable en pratique (quoiqu'elle soit exploitable par ordinateur), et on doit plutôt se servir des méthodes qu'on verra en **2** pour obtenir P_1 et P_2)

Une fois mis (par récurrence) F sous la forme $F = \sum_{k=0}^{p} \frac{P_k}{(X-\alpha_k)^{n_k}}$, il reste à décomposer ces termes. Écrivant (division euclidienne par $X-\alpha_k$) : $P_k = (X-\alpha_k)D_k + \beta_k$, et recommençant la division sur D_k jusqu'à aboutir à des constantes, on voit qu'on peut écrire F (de manière unique) sous la forme générale suivante :

$$F(X) = A(X) + \sum_{k=0}^{p}\left(\frac{\beta_{1k}}{X-\alpha_k} + \frac{\beta_{2k}}{(X-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{\beta_{n_k k}}{(X-\alpha_k)^{n_k}}\right)$$

où A est un polynôme (la partie principale de F) et où les α et les β sont des constantes complexes.

1.3 Théorème d'unicité dans R.

Si P et Q sont à coefficients réels, le théorème précédent s'applique encore, mais on sait que les racines non réelles de Q sont conjuguées 2 à 2. Il est alors possible de regrouper les termes correspondants dans la décomposition de F, pour ne plus obtenir que des termes à coefficients réels, qui correspondent à ce qu'on a appelé au chapitre précédent des éléments simples de seconde espèce.

Il est un peu délicat de donner une forme exacte (bien entendu inutile en pratique) ; avec les notations précédentes, on a à présent (*décomposition en éléments simples dans* **R**) :

$$F(X) = A(X) + \sum_{k=0}^{q} \left(\frac{d_{1k}}{X - a_k} + \frac{d_{2k}}{(X - a_k)^2} + \cdots + \frac{d_{n_k k}}{(X - a_k)^{n_k}} \right)$$
$$+ \sum_{k'=0}^{q'} \left(\frac{e_{1k'}X + f_{1k'}}{X^2 + b_{k'}X + c_{k'}} + \frac{e_{2k'}X + f_{2k'}}{(X^2 + b_{k'}X + c_{k'})^2} + \cdots + \frac{e_{m_{k'}k'}X + f_{m_{k'}k'}}{(X^2 + b_{k'}X + c_{k'})^{m_{k'}}} \right)$$

où toutes les constantes a_i, b_i, c_i, d_i, e_i et f_i sont réelles, et où les discriminants $b_i^2 - 4c_i$ sont négatifs.

2 Méthodes pratiques.

2.1 Identification.

La forme de la décomposition étant connue (c'est-à-dire que Q est factorisé, mais qu'on ne connaît pas les numérateurs de la décomposition), on peut les obtenir par identification en remettant les termes de la décomposition au même dénominateur. Mais cette méthode est vite inextricable pour des degrés un peu élevés. On pensera toutefois à l'utiliser dans les cas de deux éléments simples de seconde espèce, de degré 1 (elle est alors un peu plus rapide que les méthodes de pôles).

2.2 Pôles simples.

Si α est un pôle simple de F, on peut écrire $F = a/(X - \alpha) + G$, où G est une fraction rationnelle définie en α, et où $a/(X - \alpha)$ est l'élément simple correspondant à α; il est clair alors que $a = \lim_{X \to \alpha} (X - \alpha)F(X)$, et cette limite peut se calculer aisément (si on pose $F = P/Q$, et $Q = (X - \alpha)R$, on a $a = P(\alpha)/R(\alpha)$, ou encore, d'après la règle de l'Hospital, $a = ((X - \alpha)P(X))'(\alpha)/Q'(\alpha)$.) On obtient ainsi tous les termes correspondants aux pôles simples de F; dans **R**, on peut obtenir aussi les éléments simples de seconde espèce de la forme $(aX+b)/(X^2+\beta X+\gamma)$ si on accepte de passer par les complexes. On remarquera alors que les éléments simples associés à des pôles simples conjugués sont eux-mêmes conjugués (ce qui évite de refaire le calcul), et que $a/(X - \alpha) + \bar{a}/(X - \bar{\alpha}) = ((a + \bar{a})X - (\bar{a}\alpha + a\bar{\alpha}))/(X^2 + \beta X + \gamma)$ est l'élément de seconde espèce cherché.

2.3 Pôles multiples.

La même idée (prendre la limite en α de $(X-\alpha)^n F(X)$) pourrait encore s'appliquer, mais il est plus astucieux de se ramener en 0 (par le changement de variable $x = X - \alpha$) et de remarquer que $P(x)/x^n Q(x)$ (qui est la forme obtenue) peut s'écrire $x^{-n}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n))$ (près de 0); par identification, on voit que les $a_i/(X - \alpha)^{n-i}$ sont les éléments simples de première espèce associés à α.

Exercices

1 ($\star$) Décomposer $1/(x^2 - a)$ en éléments simples dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$ (a paramètre réel).

2 ($\star\star\star$) Décomposer en éléments simples dans $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle $\prod_{i=1}^{n} (x-i)^{-1}$.

3 ($\star$) Décomposer $1/(z^4 - 1)$ en éléments simples dans $\mathbf{C}$.

($\ast\ast\ast$) Généraliser à $1/(z^n - 1)$.

4 ($\star$) Décomposer $1/(x^3 - 1)$ en éléments simples dans $\mathbf{R}$.

5 ($\star\star$) Décomposer $1/(x^2 - 1)^2$ en éléments simples dans $\mathbf{R}$.

6 ($\star\star\star$) Décomposer en éléments simples dans $\mathbf{R}$

$$\frac{1}{x(x^4-1)^2}$$

7 ($\star\star\star\star$) Décomposer en éléments simples dans $\mathbf{R}$

$$\frac{x^8}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}$$