14. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1 Définitions générales.

1.1 Équations fonctionnelles, équations différentielles.

Les équations dont on va à présent parler sont des «propriétés» de fonctions inconnues, et le problème consiste à déterminer toutes les fonctions ayant ces propriétés. Ainsi, par exemple, puisque $(n+1)! = (n+1)n!$, un «prolongement» de la fonction factorielle aux réels peut être défini comme une solution de l' «équation fonctionnelle» $(\star)$ $f(x+1) = (x+1)f(x)$, qu'on doit interpréter comme la recherche d'une fonction f inconnue vérifiant la relation $(\star)$ pour toutes les valeurs de x. (En général, ce genre d'équation admet de très nombreuses solutions, et il faudra souvent en pratique imposer des conditions supplémentaires à f, autrement dit ne chercher qu'une partie des solutions de $(\star)$.)

Un important cas particulier (principalement parce qu'un grand nombre de «lois physiques» vérifient ce genre de relation) est la recherche de fonctions (suffisamment régulières) telles que leurs valeurs et celles de leurs dérivées successives «au même point» soient reliées. Une telle relation s'appelle une *équation différentielle*, ainsi par exemple la relation $f'''(x) = xf(x) + 1$ (supposée vraie pour tout x) aura comme «solution» l'ensemble des fonctions (supposées de classe $\mathcal{C}^3$ en général) la vérifiant sur $\mathbf{R}$ tout entier. Une telle fonction s'appelle une solution (souvent dite «particulière») de l'équation.

1.2 Notations.

Les équations différentielles n'utilisant que les valeurs «au même point» (ainsi, l'équation $f(x) = f''(x+1)$, dite équation «avec retard», parce que son interprétation physique est celle d'une force (liée par exemple à l'élongation d'un ressort) qui n'agirait qu'après un certain temps, n'est **pas** une équation différentielle), on peut se contenter de noter seulement la fonction (inconnue) et ses dérivées par une seule lettre (traditionnellement y), ainsi l'équation du paragraphe précédent s'abrège-t-elle en $y''' = xy+1$. Cette notation est toutefois dangereuse si plusieurs fonctions inconnues (ou plusieurs variables) viennent à figurer; on verra en particulier que pour pouvoir procéder à des changement d'inconnues, il faudra en général reprendre une notation plus rigoureuse.

1.3 Équations linéaires.

On dit qu'une équation différentielle est *linéaire d'ordre n* si on peut l'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = b(x)$, où la fonction $a_n(x)$ n'est pas (identiquement) nulle; la fonction $b(x)$ s'appelle alors le *second membre* (et on dit que l'équation est sans second membre si $b(x) = 0$.) Une théorie complète (quoique difficilement utilisable en pratique) existe pour ces équations; on en verra un exemple au prochain paragraphe, et on essaie donc de s'y ramener pour des équations «non linéaires», telles par exemple que $y'y'' = x + y$.

1.4 Existence et raccordement des solutions.

Il faut préciser que la notion de solution suppose en fait que y (ou plus précisément une fonction $f\colon x \mapsto f(x)$ satisfaisant l'équation) soit de classe $\mathcal{C}^n$ (où n est l'ordre de l'équation) sur un intervalle donné (la théorie générale des équations linéaires, qu'on verra en Spé, donne des conditions d'existence sur certains intervalles définis à l'aide des fonctions $a_k(x)$, qu'on appelle les intervalles de Cauchy). Il arrive souvent qu'on soit capable de déterminer toutes les solutions sur deux intervalles $[a;b[$ et $]b;c]$, par exemple. On n'en déduit pas forcément les solutions sur $[a;c]$, car une telle solution doit vérifier l'équation en $x = b$, ce qui suppose déjà qu'elle soit n fois dérivable en b; en pratique, cela revient à raccorder les solutions, c'est-à-dire à ne choisir que les couples (f_1, f_2) tels que $f_1(b) = f_2(b), f_1'(b) = f_2'(b), \dots$

2 Équations linéaires du premier ordre.

2.1 Équations «sans second membre».

Cherchons à résoudre l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = 0$. Les solutions non nulles de cette équation doivent vérifier $y'/y = -b(x)/a(x)$ dans tout intervalle où $a(x)$ ne s'annule pas. Si les fonctions a et b sont continues, on sait que cela implique que $\ln|y|$ soit une primitive de $-b(x)/a(x)$. Ainsi, dans un intervalle $[c;d]$ où $a(x)$ ne s'annule pas, on aura $\ln|y(x)| = \displaystyle\int_c^x \frac{-b(t)}{a(t)}dt + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$; on en déduit que les solutions sont de la forme $y = Ke^{\int \frac{-b(x)}{a(x)}dx}$, où K est une constante réelle (de signe arbitraire). Le problème du recollement est plus délicat; on verra des exemples en classe.

2.2 Cas général : solutions particulières simples.

La «linéarité» permet l'importante remarque suivante : soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation $(\star)$ $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. La fonction $Y = y_2 - y_1$ vérifie alors $(\star\star)$ $a(x)Y' + b(x)Y = 0$. On en déduit qu'étant donnée une «solution particulière» y_0 de l'équation $(\star)$, toutes les solutions de $(\star)$ sont de la forme $y = y_0 + Y$, où Y est une solution de $(\star\star)$. Comme on vient de résoudre ce type d'équation, on voit qu'il suffit pour résoudre complètement $(\star)$ d'en déterminer une seule solution.

En pratique, on est souvent amené à «deviner» une solution particulière, par exemple en s'inspirant de la forme de l'équation; il est souvent possible de déterminer le type de la solution (un polynôme, une exponentielle, une fonction trigonométrique...), et d'achever de la préciser en remplaçant dans l'équation, et en identifiant les coefficients inconnus. Des règles précises ont été données en début d'année pour les équations à coefficients ($a(x)$ et $b(x)$) constants, mais les situations qui ne sont pas de ce type doivent en général se traiter à l'aide de

2.3 La méthode de «variation de la constante».

On suppose résolue l'équation $(\star\star)$ (dite «équation sans second membre associée»), dont on a vu que la solution générale est de la forme $Kf(x)$, avec $(\ln|f|)' = -b(x)/a(x)$. Soit y une solution de $(\star)$, et posons $y(x) = k(x)f(x)$. On a $y' = k'f + kf'$, et donc $ay' + by = ak'f$. Aisi, k doit vérifier l'équation $k'(x) = c(x)/a(x)f(x)$; et par conséquent il suffit de connaître une primitive de $c(x)/a(x)f(x)$ pour avoir résolu $(\star)$. On dit qu'on a *ramené $(\star)$ à des quadratures*. Cette méthode ne donne que rarement des résultats explicites (car peu de fonctions sont intégrables explicitement), mais outre qu'elle est efficace dans des cas non traitables par identification, elle donne aussi des possibilités de calcul numérique, avec une imprécision plus facilement estimable que celle de la méthode d'Euler, par exemple.

3 Équations linéaires du second ordre.

3.1 Théorie générale.

La linéarité permet d'établir des résultats analogues à ceux vus plus haut : d'une part, toute solution y de l'équation $(\star)$ $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ est somme d'une solution «particulière» y_0 de cette équation et d'une solution («générale») Y de l'équation sans second membre associée $(\star\star)$ $a(x)Y'' + b(x)Y' + c(x)Y = 0$; d'autre part, si Y_1 et Y_2 sont deux solutions de $(\star\star)$, il en est de même de $\alpha Y_1 + \beta Y_2$, où α et β sont des constantes.

Un théorème (difficile) dû à Cauchy montre que sous certaines conditions précises qu'on verra en Spé (mais qui sont en général vérifiées sur des intervalles où $a(x)$ ne s'annule pas), toutes les solutions de $(\star\star)$ sont de cette forme (à condition que les fonctions Y_1 et Y_2 ne soient pas proportionnelles). C'est ce qui justifie la «méthode» qui a été exposée dans l'interlude suivant le chapitre 5, dans le cas de coefficients (a, b et c) **constants** : on recherche des solutions Y de la forme $e^{\lambda x}$ (avec λ constante) ; on vérifie alors que λ doit satisfaire l' *«équation caractéristique»* (C) $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, ce qui fournit (en général) deux «solutions indépendantes» $Y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $Y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$; d'où on tire la solution complète de $(\star\star)$ (on se rappelle qu'il faut remplaceer Y_2 par $xe^{\lambda_1 x}$ quand les racines λ_1 et λ_2 sont confondues). Mais cette méthode ne donne rien si les coeficients a, b ou c ne sont plus constants; et il faut alors déterminer les solutions particulières par des méthodes non systématiques, dont on verra un échantillon en Spé.

3.2 Quelques «trucs».

La détermination de solutions particulières pour les équations avec second membre peut se faire par «variation des constantes», mais on verra en exercice que c'est en général inapplicable en pratique. On essaiera plutôt de deviner la forme d'une solution, et de terminer sa détermination par identification; on se rappelera en particulier que dans le cas de coefficients constants, si le second membre est de la forme $P(x)e^{kx}$ (avec P polynôme et k constante (mais k peut être complexe)), il en est de même de la solution particulière : $y_0 = Q(x)e^{kx}$, et le polynôme Q a le même degré que P, sauf si k est solution de l'équation caractéristique (C) (auquel cas il faut prendre pour Q un polynôme de degré supérieur).

3.3 Comment exploiter une méthode «suggérée».

On peut parfois ramener une équation différentielle à une autre plus simple par un changement de variable ou de fonction inconnue. Il n'y a pas de recette universelle; on verra en Spé certaines familles d'équations (Bernouilli, Ricatti, etc.) pour lesquelles on connaît une méthode générale. Il faut par contre pouvoir mettre en œuvre une méthode suggérée par un énoncé; voici un exemple :

Soit à résoudre l'équation $xy' + y = y^3$ On va effectuer un changement de fonction inconnue, dû à Bernouilli : on pose $z(x) = 1/y^2(x)$. Il vient $z' = -2y'/y^3$, donc $-xz' + 2z = 2$; cette équation linéaire se résout élémentairement, puisque $2z = xz'$

a pour solution $z(x) = kx^2$, et que $z = 1$ est solution particulière; on obtient donc finalement (dans des intervalles qui resteraient à préciser) $y(x) = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 + kx^2}}$

Exercices

(On pensera aussi à (re)faire les exercices de l'interlude du chapitre 5 !)

1 ($\star$) Résoudre (sur $\mathbf{R}_*^+$) l'équation différentielle $xy' + y = 1/x^2$.

2 ($\star\star$) Résoudre (sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$) l'équation différentielle

$$y' \cos x + y \sin x = 1.$$

3 ($\star\star$) Résoudre (dans $\mathbf{R}$) l'équation différentielle $y' = xy + \sin x$.

4 ($\star\star\star$) Montrer qu'en posant comme nouvelle fonction inconnue $Y = y + y'$, l'équation $2y'' + 3y' + y = f(x)$ se ramène à la résolution de deux équations différentielles d'ordre 1; démontrer le théorème de Cauchy dans ce cas (pour $f(x) = 0$) et résoudre complètement (par cette méthode) l'équation pour $f(x) = e^{-x}$.

5 ($\star\star\star$) Résoudre l'équation $y''' + y'' + y' + y = 0$ à l'aide d'un changement de fonction inconnue; pouvait-on deviner le résultat ?

T 28 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $4x^2 y'' + y = 0$ (on commencera par rechercher les solutions de la forme Kx^α, puis on appliquera la méthode de «variation de la constante»). En déduire les solutions de l'équation sur $\mathbf{R}$.

6 ($\star\star\star$) Remarquer que $y = e^x$ est solution de $y'' + xy' - (x+1)y = 0$. Que prévoit le théorème de Cauchy dans ce cas ? Utiliser une méthode de variation de constante pour résoudre complètement l'équation.

14. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Plan

14. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

(Formulaire)

1 Définitions générales.

Définition 1. 1. *On appelle* **équation différentielle d'ordre** n *une relation de la forme* $R(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, *o- les* $y^{(k)}$ *désignent les dérivées successives d'une même fonction en un même point* x ; *on dira que* $f : x \mapsto f(x)$ *est une* **solution particulière** *de l'équation sur un intervalle* I *si* f *est* n *fois dérivable sur* I *et si pour tout* x *de* I *on a la relation* $R(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x))$. *On appelle* **solution** *de l'équation l'ensemble de ses solutions particulières.*

Définition 1. 2. *On dit qu'une équation différentielle est* **linéaire d'ordre** n *si on peut l'écrire sous la forme* $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = b(x)$, *o- la fonction* $a_n(x)$ *n'est pas (identiquement) nulle; la fonction* $b(x)$ *s'appelle alors le* **second membre** *(et on dit que l'équation est* **sans second membre** *si* $b(x) = 0$*).*

2 Équations linéaires du premier ordre.

Si $a(x)y' + b(x)y = 0$ est une équation linéaire du premier ordre sans second membre (o- a et b sont des fonctions continues), on montre qu'elle a pour solutions (sur tout intervalle o- $a(x)$ ne s'annule pas) les fonctions de la forme $Ke^{\int -b(x)/a(x)dx}$ (l'exposant désignant une primitive fixée quelconque). Les solutions de l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sont alors de la forme $Kf_1(x) + f_0(x)$, o- f_1 est la fonction $x \mapsto e^{\int -b(x)/a(x)dx}$, et o- f_0 est une solution particulière. On dit que Kf_1 est la solution générale de l'équation sans second membre associée.

Définition 2. 1. *Pour obtenir* f_0 *(quand on ne parvient pas à l'obtenir par identification), on utilise la méthode de* **variation de la constante** *: on pose* $f(x) = K(x)f_1(x)$, *obtenant l'équation* $K'(x) = c(x)/a(x)f_1(x)$, *d'o-* $K(x)$ *par intégration.*

3 Équations linéaires du second ordre.

Solution générale (Cauchy) de l'équation $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$**.** *Sur tout intervalle o-* $a(x)$ *ne s'annule pas, et si* a, b, c, *et* d *sont suffisamment régulières, il existe trois fonctions* f_1, f_2, *et* f_0 *telles que* f_1 *et* f_2 *ne soient pas proportionnelles (c'est-à-dire que la fonction* f_1/f_2 *n'est pas constante), que* f_0 *soit solution (particulière) de l'équation et que* f_1 *et* f_2 *soient solutions de l'équation sans second membre associée* $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$. *La solution générale est alors (sur cet intervalle) l'ensemble des fonctions* f *de la forme* $f = Af_1 + Bf_2 + f_0$.

Équation $ay'' + by' + cy = 0$**.** *(*a, b *et* c **constantes***). On commence par détermienr les solutions de la forme* $e^{\lambda x}$ *(*λ *constante). On aboutit à l'***équation caractéristique** $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. *Si elle admet deux racines réelles* λ_1 *et* λ_2, *la solution générale est donc* $Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$. *Si elle admet les racines complexes* $\lambda = -k \pm i\omega$, *on démontre que la solution générale est* $e^{-kx}(A\cos\omega x + B\sin\omega x) = Ke^{-kx}\cos(\omega x + \varphi)$. *Si enfin elle admet* λ_0 *comme racine double, la solution générale devient* $(Ax + B)e^{\lambda_0 x}$.