

15. APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATIONS

Les diverses généralisations et applications abordées dans ce chapitre visent surtout à faire le lien avec des situations sans doute déjà abordées en Physique (tout particulièrement en Mécanique et en Thermodynamique), et à introduire des idées et de méthodes qui seront développées en Spé; le programme prévoit une liste de définitions et de résultats, mais n'impose pas leur connaissance dans le cadre des concours! C'est pourquoi aucun exercice ne figure ici; il vaut sans doute mieux considérer l'ensemble de ce chapitre comme une collection de travaux dirigés...

1 Calcul numérique.

1.1 Résolution d'équations : dichotomie.

L'aspect théorique de cette méthode a été vu au chapitre 9; d'un point de vue pratique, c'est une méthode très robuste, puisqu'il suffit pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ que la fonction f soit continue, et qu'on connaisse un intervalle $[a; b]$ où elle change de signe (c'est-à-dire que $f(a)f(b) < 0$); et alors, chaque étape de dichotomie divisant l'intervalle $[a; b]$ en deux, on voit que pour atteindre la précision ε , il faut n étapes, avec $2^n \geq (b-a)/\varepsilon$ (et la méthode demande essentiellement le calcul de n valeurs de f). Le seul inconvénient est l'impossibilité d'obtenir une racine double d'un polynôme, par exemple, puisqu'alors f s'annule sans changer de signe; mais c'est un cas très rare en pratique.

1.2 Résolution d'équations : itération; la méthode de Newton.

Un second groupe important de méthodes (qui présentent d'ailleurs l'avantage de pouvoir se généraliser à des fonctions complexes, par exemple) consiste à construire une suite définie par récurrence à l'aide de la fonction f . Ainsi, par exemple, soit u la suite définie par $u_{n+1} = af(u_n) + u_n$ ($a \neq 0$ constante fixée). Il est clair (si f est continue) que la limite éventuelle L de u doit vérifier $L = af(L) + L$, et donc que L doit être solution de l'équation $f(L) = 0$. Ces méthodes (dites d'*itération*) présentent l'inconvénient de dépendre du point de départ u_0 , et plus gravement de ne pas toujours converger. Newton a démontré qu'on pouvait les optimiser en faisant varier a avec u_n ; un raisonnement géométrique basé sur la tangente au graphe de f aboutit à la formule

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

qui converge (**très** rapidement) vers une solution de $f(x) = 0$ si f est de classe \mathcal{C}^1 et si le «point de départ» u_0 est choisi assez près de cette solution. L'étude précise de l'efficacité de la méthode (ou d'autres analogues) passe par un DL de f au voisinage de la solution x_0 ; on montre (pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $f'(x_0) \neq 0$) que si $|u_n - x_0| = \varepsilon$, on a $|u_{n+1} - x_0| \simeq \varepsilon^2 |f''(x_0)|/2$ (convergence dite «exponentielle»), c'est-à-dire qu'on double à peu près le nombre de décimales exactes à chaque étape.

1.3 Dérivation numérique.

Le calcul approché de la dérivée de f en a par la formule $f'(a) \simeq (f(a+\varepsilon) - f(a))/\varepsilon$ conduit à une erreur de l'ordre de ε . Or il est difficile de prendre une valeur très petite

de ε sans augmenter trop l'incertitude du calcul lui-même. Heureusement, on montre que la formule presque identique $f'(a) \simeq (f(a+\varepsilon) - f(a-\varepsilon))/2\varepsilon$ («dérivée symétrique») conduit à une erreur de l'ordre de ε^2 ; suffisante en pratique (une méthode plus précise, mais demandant plus de calculs, a été étudiée en DM). On aura intérêt à utiliser une formule de ce genre dans les applications pratiques de la méthode de Newton, car le calcul exact de la dérivée, outre qu'il conduit à une programmation bien plus longue, risque d'introduire des erreurs de calculs supplémentaires si f est compliquée!

1.4 Intégration numérique.

L'idée générale des méthodes les plus courantes consiste à remplacer la fonction à intégrer par une fonction plus simple, le plus souvent définie par intervalles. On décompose donc l'intervalle d'intégration $[a; b]$ en N intervalles de largeur $\varepsilon = (b - a)/N$ (le «pas»); puis on calcule (à l'aide des valeurs de la fonction aux bornes de ces intervalles) l'intégrale de la fonction approchée, et on additionne les résultats. On obtient ainsi :

$$f(x) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f(a+k\varepsilon) \quad (\text{méthode des rectangles})$$

$$f(x) = \frac{b-a}{N} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(a+k\varepsilon) \right) \quad (\text{méthode des trapèzes})$$

En utilisant des polynômes de degré 2 (passant par trois points consécutifs du graphe), on obtient une formule plus précise : la *méthode de Simpson*

$$f(x) = \frac{b-a}{3N} (f(a) + 4f(a+\varepsilon) + 2f(a+2\varepsilon) + 4f(a+3\varepsilon) + \dots \\ \dots + 2f(a+(N-2)\varepsilon) + 4f(a+(N-1)\varepsilon) + f(b))$$

(le calcul sera fait en classe; on vérifie aisément la vraisemblance d'une formule de ce genre en prenant f constante).

Il est relativement difficile de donner une estimation de l'erreur commise (on voit, dès la méthode des trapèzes, que cela doit dépendre de la courbure, donc de f''). On montre qu'elle est proportionnelle à N^{-5} ; une étude comparée de ces différentes méthodes (et de la formule de Newton, qui utilise des polynômes de degré 4 ou plus) sera faite en Informatique.

1.5 Approximation des fonctions.

Le remplacement de fonction par des valeurs approchées simples à calculer donne naissance à des techniques très variées : développements limités (par exemple la formule de Taylor), décompositions (éléments simples, coefficients de Fourier, ...), lissages (méthode des moindres carrés de Gauss). Nous allons ici donner la solution de Lagrange au problème de trouver un polynôme prenant un certain nombre de valeurs données (autrement dit, la contrainte est d'être **exactement** égal à la fonction à approcher pour un nombre donné de valeurs).

On verra alors en classe que le polynôme donné par la formule

$$P(X) = \sum_{k=1}^n b_k \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

est le seul polynôme de degré $\leq n - 1$ tel que $P(a_k) = b_k$ pour tout k (cette formule s'obtient en commençant par résoudre le problème analogue plus simple $b_1 = 1$ et $b_k = 0$ si $k > 1$).

Le calcul pratique du polynôme de Lagrange (encore appelé *polynôme d'interpolation*) n'est pas très difficile, si on n'essaie pas de le développer; un travail informatique permettra d'estimer la précision de l'approximation obtenue. Une technique analogue permettrait de généraliser en cherchant à imposer les valeurs de la fonction et de ses dérivées; on aboutit à des courbes importantes en DAO, les fonctions splines et les courbes de Bézier.

2 Utilisation des complexes.

2.1 Définitions générales.

L'étude des « vraies » fonctions complexes (allant de \mathbf{C} vers \mathbf{C}) est (en dehors du cas des polynômes et des fractions rationnelles, et aussi des fonctions déduites de l'exponentielle complexe) absolument hors-programme, y compris en Spé; en revanche, on peut sans grandes difficultés généraliser beaucoup des définitions et des résultats des précédents chapitres aux fonctions de \mathbf{R} vers \mathbf{C} (fonctions complexes d'une variable réelle). Une telle fonction (dont on note souvent la variable t , pour éviter des confusions) est donc de la forme $t \mapsto f(t) = g(t) + ih(t)$, où les fonctions composantes g et h (que l'on notera aussi $\Re(f)$ et $\text{Im}(f)$) sont des fonctions « ordinaires » de \mathbf{R} vers \mathbf{R} ; on généralisera les propriétés étudiées en disant que f les a si g et h les ont.

2.2 Étude globale : parité et périodicité.

Reprenant le plan énoncé au chapitre 5 (et détaillé dans les chapitres 8 et suivants), on cherchera d'abord le domaine : on a $D_f = (D_g \cap D_h) \subset \mathbf{R}$. Toutefois, des éléments majeurs de ce plan d'étude ont disparus : on ne peut pas parler des variations de f , puisque \mathbf{C} n'est pas ordonné, et le graphe (au sens défini au chapitre 7) est à présent une courbe de l'espace, difficile à représenter et sans intérêt pratique. Bien que les symétries éventuelles du graphe n'aient plus d'utilité, on dira encore que f est paire (respectivement impaire) si g et h le sont, et donc si (pour tout $t \in D_f$) $f(-t) = f(t)$ (respectivement $f(-t) = -f(t)$); et que f est T -périodique si $f(t + T) = f(t)$ (ce qui équivaut à g et h périodiques, et de même période T).

2.3 Limites et continuité.

La notion de limite « infinie » n'a pas de sens dans \mathbf{C} (mais on peut évidemment dire que $\lim_{t \rightarrow a} |f(t)| = +\infty$, puisque la fonction « module de f » est à valeurs réelles); on définit $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell_1 + i\ell_2$ (avec $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbf{R}^2$ et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) par $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = \ell_1$ et $\lim_{t \rightarrow a} h(t) = \ell_2$; les résultats usuels (sauf évidemment la composition « générale » des limites, qui supposerait que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ait un sens) s'en déduisent; et la définition de la continuité de f en $a \in D_f$ ($\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$) est donc équivalente à la continuité (en a) de g et h .

2.4 Dérivabilité, formules d'approximation.

Avec la définition usuelle de la dérivée, on obtient $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = g'(a) + ih'(a)$ si g et h sont dérivables en a ; autrement dit, les calculs sont analogues à ceux dans \mathbf{R} , en interprétant (ce qui paraît logique) i comme une constante, donc de dérivée nulle. On remarquera en particulier que $[t \mapsto e^{ct}]^{(n)} = [t \mapsto c^n e^{ct}]$, si c est une constante complexe, et que $[t \mapsto (t+c)^{-1}]^{(n)} = [t \mapsto (-1)^n n!(t+c)^{-(n+1)}]$. Par contre, les propriétés «théoriques» de la dérivée ne sont plus vraies; on vérifiera, par exemple, que le lemme de Rolle est faux pour la fonction $t \mapsto e^{it}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$! Par simple séparation des parties réelles et imaginaires, on peut toutefois obtenir un DL de Young de $f = g + ih$ si g et h en ont un :

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n + t^n(t)\varepsilon(t),$$

où ε est une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{C} telle que $\lim_0 \varepsilon = 0$; de même, il est possible (en utilisant l'inégalité triangulaire, d'obtenir une «inégalité des accroissements finis», comme on le verra en classe.

2.5 Intégration et équations différentielles.

Si les fonctions (réelles) g et h sont intégrables sur un intervalle (fermé) $[a, b]$, on dit que $f = g + ih$ l'est également; et on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt + i \int_a^b h(t) dt;$$

dans le cas particulier où f est continue, $F = G + iH$ est une primitive de f (avec les notations usuelles) et $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$. Malheureusement, cette extension n'est guère utile que pour intégrer des expressions trigonométriques se ramenant à l'exponentielle complexe (car $\int e^{ct} dt = e^{ct}/c + K$, avec $K \in \mathbf{C}$); en particulier, il ne faudrait pas espérer trouver une primitive «simple» à $1/(t+i)$, telle que $\ln(t+i)$: on sait qu'il est impossible de prolonger le logarithme à \mathbf{C} .

Enfin, il est possible de rechercher les solutions «complexes» des équations différentielles, ce qui n'a guère d'intérêt pratique que pour revenir ensuite au cas réel; le théorème de Cauchy (linéaire) est encore vrai, mais on aura soin de ne pas se contenter de prendre la partie réelle des solutions trouvées: il faut en fait chercher les valeurs (complexes) des constantes A et B qui apparaissent, telles que la combinaison $Af_1 + Bf_2$ soit réelle (donc de partie imaginaire nulle). C'est cette méthode qui permet de justifier complètement l'apparition des termes oscillants des systèmes faiblement amortis.

★

★ ★

★

3 Courbes paramétrées du plan.

Cette section ne vise pas à une étude complète (qui sera abordée au chapitre 23, et complétée en Spé) mais seulement à la mise en œuvre des techniques de l'Analyse (en particulier des méthodes d'approximation du chapitre 11) à la résolution de quelques problèmes d'étude de courbes

3.1 Définitions.

On appelle *arc paramétré* (du plan) une application (continue, et suffisamment régulière) d'un intervalle de \mathbf{R} dans le plan (des définitions analogues peuvent être données dans l'espace, mais nous n'étudierons ici que des courbes planes). Toute fonction régulière de \mathbf{R} vers le plan est réunion d'arcs paramétrés et sera dite *courbe paramétrée du plan*; on appelle *trajectoire* (ou support) de la courbe l'image $f(\mathbf{R})$ et parfois, par abus de langage, on confond la courbe et sa trajectoire. Ainsi, le cercle unité, d'équation cartésienne $[X^2 + Y^2 = 1]$, peut être paramétré aussi bien par $t \mapsto (\sin t, \cos t)$ que par $t \mapsto (\sin 3t, \cos 3t)$ (il s'agit là de deux «mouvements circulaires uniformes», mais à des vitesses différentes); le cercle est la trajectoire des deux fonctions, mais on ne devrait pas en principe identifier les deux courbes. Toutefois, dans les applications géométriques, on part en général de la trajectoire (considérée comme une partie du plan), et on utilise n'importe quel paramétrage (régulier) pour étudier la «forme» de la courbe; on verra en Spé comment utiliser la longueur comme un paramétrage «intrinsèque».

Dans un repère donné, on peut noter la fonction par les coordonnées de l'image; la courbe $t \mapsto M(t) = (f(t); g(t))$ se notera plutôt

$$\begin{cases} X = f(t) \\ Y = g(t) \end{cases}$$

qu'on appelle un système d'équations paramétriques de la courbe. Déterminer une relation (où ne figure pas t) entre X et Y , c'est obtenir une équation cartésienne de la courbe (on dit qu'on a **éliminé** t) Toutefois, il faut être prudent : cette méthode détermine en général une courbe **contenant** la première, mais pas forcément égale : la courbe $t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$ conduit par élimination au cercle unité (puisque $t^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 = 1$), mais cette courbe n'a pour trajectoire que le demi-cercle supérieur (puisque $Y = \sqrt{1-t^2} \geq 0$).

Des considérations analogues permettent d'étudier les «symétries» de la courbe; on les verra plus précisément au chapitre 23.

Si on a étudié indépendamment les variations de $x(t)$ et de $y(t)$, on dispose en général d'une suite d'intervalles où ces deux fonctions sont continues et monotones. Il est alors possible d'écrire t en fonction de x , et d'aboutir à $Y = y(x^{-1}(X))$; en pratique, on utilise les deux tableaux de variations de $x(t)$ et $y(t)$ pour obtenir une suite d'arcs «monotones» de la courbe, comme on le verra en classe.

3.2 Propriétés locales.

Plaçons-nous près d'un point de la courbe $M_0: (X_0 = f(t_0), Y_0 = g(t_0))$. Si les fonctions f et g sont assez régulières (par exemple de classe \mathcal{C}^1), on peut, pour t proche de t_0 , approximer les coordonnées de $M(t)$ par les fonctions affines tangentes : $X \simeq X_0 + (t-t_0)f'(t_0)$ et $Y \simeq Y_0 + (t-t_0)g'(t_0)$. On peut alors montrer (ce sera fait en classe, et plus rigoureusement en Spé) que la courbe «ressemble» (au voisinage de M_0)

à la droite (T) d'équation cartésienne : $[(X - X_0)g'(t_0) - (Y - Y_0)f'(t_0) = 0]$, si du moins $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$ ne sont pas tous deux nuls; on dit que M_0 est un point *régulier* de la courbe et que la droite (T) est la *tangente* en M_0 .

Pour obtenir des informations plus précises, on procédera en général à un DL (plus poussé) des fonctions f et g (ce qui sera aussi nécessaire si $f'(t_0) = g'(t_0) = 0$, c'est-à-dire en un point non régulier). Il s'avère commode de raisonner vectoriellement, c'est-à-dire d'écrire $\overrightarrow{OM}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j}$ et de définir la dérivée d'une «fonction vectorielle» $t \mapsto \overrightarrow{V}(t) = (x(t), y(t))$ par $\overrightarrow{V}'(t) = (\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t))$.

On obtient alors des formules de Taylor généralisées, telle le DL suivant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}_0 + (t - t_0)\overrightarrow{OM}'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\overrightarrow{OM}''(t_0) + \dots \\ \dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!}\overrightarrow{OM}^{(n)}(t_0) + \ll o((t - t_0)^n) \gg. \end{aligned}$$

Une telle formule permet un intéressant changement de repère, obtenu en prenant M_0 comme nouvelle origine et les deux premiers vecteurs non colinéaires du DL comme nouvelle base : c'est ce qu'on appelle le repère de Frenet (plus précisément, on verra en Spé comment définir un repère orthonormal ayant les mêmes avantages). Dans ce repère, on peut (à des termes négligeables près) écrire $x(t) = at^m$ et $y(t) = bt^n$, ce qui permet une classification simple qui sera vue en classe, et par exemple la caractérisation des points d'inflexion par : m et n impairs.

En réalité, cette étude ne correspond qu'à la restriction de la courbe au voisinage de t_0 ; il faut aussi envisager le cas où le même point M_0 aurait plusieurs antécédents : on dit alors que c'est un *point multiple*. Si par exemple $f(t_0) = f(t_1)$ et $g(t_0) = g(t_1)$ (point double), la courbe semble se «recouper» elle-même en M_0 , où il y aura en général deux tangentes distinctes. Leur détermination étant délicate, on ne la tentera que si la représentation graphique laisse penser qu'il en existe; il faudra alors résoudre le système $\{f(t_0) = f(t_1), g(t_0) = g(t_1), t_0 \neq t_1\}$, où l'on pensera à factoriser $(t_1 - t_0)$ dans les deux équations...

3.3 Comportements asymptotiques.

Le comportement de la courbe «à l'infini» a des aspects plus variés que celui des graphes : tout d'abord, le «point représentatif» $M(t)$ peut «s'éloigner à l'infini», c'est-à-dire que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\overrightarrow{OM}(t)\| = +\infty$ (quand t tend vers l'infini, ou vers une des bornes du domaine de définition); on s'intéresse alors à la «direction asymptotique» de cet éloignement, c'est-à-dire à la direction limite du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$; en remplaçant ce dernier par un vecteur «fini» de même direction, par exemple $(1; y(t)/x(t))$, cela revient à un calcul de limite «ordinaire»; une recherche d'asymptote peut alors se faire en déterminant la limite de $y(t) - ax(t)$ (où a est la limite qu'on vient de trouver); mais on aura en général intérêt à utiliser des DL (généralisés) de $x(t)$ et $y(t)$, et à essayer d'écrire une relation de la forme $Ax(t) + By(t) + c = o(1)$.

Mais il est aussi possible que la courbe se rapproche par exemple d'un point limite en tournant autour de ce point (on dit que c'est un *point asymptote*, et que la courbe est une *spirale*); on déterminera un tel comportement en étudiant la direction de la sécante OM , et on verra (au chapitre 23) que ce type de courbe est beaucoup plus aisément étudié en coordonnées polaires.

4 Fonctions de plusieurs variables.

4.1 Définitions.

On appelle *fonction (numérique) de p variables* une fonction allant de \mathbf{R}^p vers \mathbf{R} , donc de la forme $(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto f((x_1, x_2, \dots, x_p))$; l'image est souvent notée $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux fonctions de deux variables. Le graphe d'une telle fonction est donc un sous-ensemble de \mathbf{R}^3 , qui, si f est assez régulière, est une «surface» (caractérisée par le fait qu'il n'y a, au plus, qu'un point «à la verticale» de chaque point du plan (O, \vec{i}, \vec{j})). Si on coupe cette surface par des plans «verticaux» $X = a$ ou $Y = b$, on obtient (dans les repères appropriés) des graphes de fonctions à une variable : $f_a : y \mapsto f(a, y)$ et $g_b : x \mapsto f(x, b)$, qu'on appelle souvent des *fonctions partielles*, et qu'on note $f_a = f(a, \cdot)$ et $g_b = f(\cdot, b)$. D'autre part, l'ensemble des points tels que $f(x, y) = c$ est la projection de la coupe du graphe par le plan $Z = c$, qu'on appelle *courbe de niveau c* (de f); ce sont ces lignes qui sont utilisées dans les représentations des cartographes, par exemple.

4.2 Dérivées partielles.

L'étude locale des fonctions de plusieurs variables passe d'abord par celle des fonctions partielles. Supposons, par exemple, que la fonction partielle $g_b : x \mapsto f(x, b)$ soit dérivable en a . On appelle alors *dérivée partielle de f* par rapport à x (en (a, b)) le nombre $g'_b(a)$, et on le note $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ (ou parfois $f'_x(a, b)$); de même, si $f_a : y \mapsto f(a, y)$ est dérivable en b , le nombre $f'_a(b)$ se note $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ ou $f'_y(a, b)$. Les propriétés élémentaires des dérivées permettent déjà, par exemple, de voir qu'en un extremum de f (c'est-à-dire en un point $M(a, b)$ tel que $f(a, b) = \max_{(x,y) \in D} f(x, y)$, par exemple), on doit avoir $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$; l'étude (délicate) de la réciproque (bien moins souvent vraie que dans le cas à une seule variable) sera faite en Spé.

4.3 Calcul différentiel à plusieurs variables.

L'intérêt principal de ces notions est de permettre l'écriture de formules d'approximations (des «développements limités») dont on a vu des exemples en thermodynamique, et qui généralisent les notions d'approximation affine, de formule de Taylor, etc. On verra en particulier en Spé le sens de l'écriture de la «forme différentielle» $df = f'_x dx + f'_y dy$, et son utilisation pour le calcul des dérivées de fonctions composées; ainsi, par exemple, on a

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Les généralisations de la formule de Taylor amènent aussi à introduire les dérivées (partielles) d'ordre supérieur : si on considère f'_x comme une fonction de deux variables $g(x, y)$, on note par exemple $\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ (ces dérivées sont parfois notées aussi (respectivement) f''_{x^2} et f''_{xy}); on a (pour les fonctions suffisamment régulières) le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b).$$

15. APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATIONS

Plan

1	Calcul numérique.	p. 1
1.1	Résolution d'équations : dichotomie.	
1.2	Résolution d'équations : itération; la méthode de Newton.	
1.3	Dérivation numérique.	
1.4	Intégration numérique.	
1.5	Approximation des fonctions.	
2	Utilisation des complexes.	p. 3
2.1	Définitions générales.	
2.2	Étude globale : parité et périodicité.	
2.3	Limites et continuité.	
2.4	Dérivabilité, formules d'approximation.	
2.5	Intégration et équations différentielles.	
3	Courbes paramétrées du plan.	p. 5
3.1	Définitions.	
3.2	Propriétés locales.	
3.3	Comportements asymptotiques.	
4	Fonctions de plusieurs variables.	p. 7
4.1	Définitions.	
4.2	Dérivées partielles.	
4.3	Calcul différentiel à plusieurs variables.	