17. MATRICES

1 Tableaux et matrices.

1.1 Définitions et notations.

Un tableau est une généralisation de la notion de suite à plusieurs indices : utilisant Maple, on «déclarera» par exemple `TABLE:= array [1..2, 1..4, 1..3] ;` qui signifie que de la place est réservée pour 24 «objets» (des nombres, des lettres, d'autres tableaux, etc.) classés (et adressables) par des ordres tels que `TABLE [1, 3, 2]:= 5*x+1 ;`. Nous ne nous intéresserons ici qu'à des tableaux à une ou deux dimensions, ne contenant de plus que des nombres (réels ou complexes), c'est-à-dire des suites (finies) ordinaires, ou des suites à deux indices de la forme $(a_{ij})_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$, que l'on appellera *matrices à m lignes et n colonnes*, ou matrices $m\times n$. Une telle matrice sera généralement représentée entre «parenthèses» (pour ne pas être confondue avec les déterminants que nous verrons plus tard), ainsi l'écriture : soit $A=(a_{ij})$ définie par

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\\ 0 & \pi & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3-2\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

détermine une matrice 3×4 avec $a_{2\,4}=-3$ (on remarquera que dans ce cas, $a_{4\,2}$ n'est pas défini).

Plus précisément (mais cela ne sera que rarement nécessaire), une matrice est donc une application d'un produit $\{1,2,\dots,m\}\times\{1,2,\dots,n\}$ vers $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) ; on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices $m\times n$ à coefficients (ou éléments) réels (et de même $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ l'ensemble de celles à coefficients complexes) ; le cas particulier important $m=n$ (matrices *carrées*) est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ peuvent être interprétés comme des matrices «lignes» (de type $1\times n$), et c'est ainsi que nous les avons représentés jusque-là. Mais il est en fait aussi possible de les représenter par des matrices $n\times 1$ (on parle alors de «*vecteurs-colonnes*»), et nous verrons plus bas que cette convention s'avère plus pratique pour les applications usuelles. On s'habituera également à utiliser la notation en double indice : la troisième colonne de la matrice (a_{ij}) correspond par exemple au vecteur (a_{i3}). Les éléments a_{ii} d'une matrice carrée forment sa *diagonale*.

1.2 Opérations élémentaires.

Comme les vecteurs de $\mathbf{R}^n$, les matrices de mêmes dimensions peuvent être additionnées termes à termes, c'est-à-dire qu'on aura $(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$; la matrice nulle de taille (m,n) (celle dont tous les coefficients sont nuls) est élément neutre pour cette opération, que l'on note $O_{m,n}$, ou O_n (ou simplement O quand aucune confusion n'est possible). Le produit par un scalaire λ est défini de même par $\lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij})$. Une autre «transformation» importante est plutôt liée à la représentation géométrique de la matrice : la convention d'écriture en lignes et colonnes est somme toute arbitraire ; si on l'inverse, on obtient une nouvelle matrice (de type $(n\times m)$), donnée par la formule $(b_{ij})=(a_{ji})$ (comme on le vérifie aisément), qu'on appelle la *transposée* de la matrice initiale, et qu'on note ${}^t(a_{ij})$. Ainsi,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\\ 0 & \pi & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3-2\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\Rightarrow {}^tA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \pi & 1\\ 0 & 2 & 3-2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -3 & 0\end{pmatrix}$$

Le transposé d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne.

Si M est une matrice carrée, M et ${}^tM$ ont la même forme; si alors $M = {}^tM$, on dit que M est une matrice *symétrique*. On appelle de même matrice *antisymétrique* une matrice telle que $M = -{}^tM$ (c'est donc que pour tout i, j, on a $a_{ij} = -a_{ji}$, et que tous les éléments de la diagonale sont nuls). La transposition respecte les opérations définies précédemment, c'est-à-dire que ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et que ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$, et de plus ${}^t({}^tA) = A$; on en déduit (ce sera fait en classe) que toute matrice carrée est somme (de manière unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

1.3 Structure d'espace vectoriel.

Pour les opérations d'addition et de produit par un scalaire, l'ensemble des matrices (de même forme) $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ forme un ($\mathbf{R}$-) espace vectoriel; posant M_{ij} définie par $m_{ij} = 1$ et $m_{kl} = 0$ pour toutes les autres valeurs de (k, l), on vérifie aisément que $A = (a_{ij}) = \sum\limits_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij}M_{ij}$, et que la famille M_{ij} est libre, ce qui prouve qu'elle forme une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, qui est donc de dimension mn. (Le même calcul s'applique évidemment à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, qui est donc de dimension mn sur $\mathbf{C}$, et de dimension $2mn$ sur $\mathbf{R}$.) On vérifiera que les matrices symétriques forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (dont on démontrera en exercice que la dimension est $n(n+1)/2$); et on traduira le résultat du paragraphe précédent en disant que les matrices symétriques et antisymétriques forment deux sous-espaces supplémentaires.

2 Représentations matricielles.

2.1 Familles de vecteurs.

Soit $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_j)_{1\le j\le n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel (de dimension finie m) muni de la base $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_i)_{1\le i\le m}$. Chaque vecteur $\mathbf{v}_j$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{v}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{b}_i$; et on dira que la matrice $M = (a_{ij})_{1\le i\le m; 1\le j\le n}$ représente la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$. (On remarquera que la j-ème colonne de M représente le vecteur («vecteur-colonne») $\mathbf{v}_j$). En particulier, la représentation de $\mathcal{B}$ est une matrice carrée dont la diagonale est formée de 1, et dont les autres éléments sont nuls, cette matrice s'appelle la matrice unité (de $\mathcal{M}_n$) et se note I_n (ou I quand aucune confusion n'est possible).

On appelle *rang* de la matrice (noté $\mathrm{rg}(M)$) le rang de la famille qu'elle représente; on verra au chapitre 19 que cela ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$. De plus, on admettra le théorème remarquable suivant : $\mathrm{rg}({}^tM) = \mathrm{rg}(M)$ (la démonstration utilise des outils hors-programme), qui affirme que les vecteurs-lignes et les vecteurs-colonnes d'une même matrice ont des liens cachés; on verra en classe sur un exemple comment utiliser ce théorème pour simplifier le calcul du rang de certaines familles.

2.2 Systèmes linéaires.

Soit à présent

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

un système (linéaire) de m équations à n inconnues (remarquer que la notation n'est pas exactement celle du chapitre 16). On dira que la matrice $M = (a_{ij})_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$ représente le système des équations (plus précisément des premiers membres) de (S); on verra au paragraphe suivant que le système (S) peut alors être écrit sous forme d'une seule équation matricielle (de la forme $MX = B$).

2. 3 Matrice de passage.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension n. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, et on note $P(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$, la matrice qui représente la famille $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$ (on prendra garde à ce que cette définition n'est pas donnée dans le sens «naturel»). On verra au prochain paragraphe comment utiliser P pour calculer effectivement les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}_2$ quand on les connait dans la base $\mathcal{B}_1$.

3 Multiplication.

3. 1 Définition et justification.

On fera en classe le calcul classique (dont l'explication théorique sera donnée en **3. 5**) de la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_3$, connaissant celles de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_3$. D'autres calculs analogues amènent à définir comme «naturelle» une multiplication de matrices, qui s'avère pouvoir être effectuée entre les matrices de $\mathcal{M}_{m,n}$ et celles de $\mathcal{M}_{n,p}$: de façon précise, si $A = (a_{ij})$ est une matrice $m \times n$ et si $B = (b_{ij})$ est une matrice $n \times p$, on peut définir le produit AB (mais pas le produit BA en général) comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ (de dimension $m \times p$) déterminée par la formule :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Cette formule doit être comprise comme définissant chaque élément de C à partir d'une ligne de A «multipliée» par une colonne de B, comme on le verra en classe; un important cas particulier est celui où $p = 1$ (multiplication par un vecteur-colonne), le résultat est alors un autre vecteur-colonne, et on vérifiera par exemple que le système (S) défini en **2. 2** peut se réécrire $MX = B$, où M est la matrice des équations, B est le vecteur-colonne des seconds membres b_i, et X est un vecteur-colonne inconnu, dont les coefficients sont les x_i inconnus de (S).

3. 2 Structure d'algèbre.

La notation AB vient de ce que cette opération se comporte comme la multiplication ordinaire, à deux importantes exceptions près : elle n'est pas commutative, c'est-à-dire qu'on peut avoir $AB \neq BA$, même quand les deux produits sont définis, et elle n'est pas régulière, c'est-à-dire qu'on peut avoir $AB = O$ même si A et B ne sont pas nulles. En se restreignant aux matrices carrées d'ordre n (pour lesquelles le produit est toujours défini), on démontre les formules suivantes

$$A(BC) = (AB)C \quad \text{(associativité)}$$

$$A(B+C) = AB+AC \quad (A+B)C = AC+BC \quad \text{(distributivité à gauche et à droite)}$$

$$AI_n = I_nA = A \quad \text{(existence d'un élément unité)}$$

(les démonstrations sont des exercices classiques de manipulations de sommes doubles)

On verra au prochain chapitre que cela entraîne que l'ensemble des matrices (carrées) muni de l'addition et de la multiplication a une structure d'anneau unitaire (non commutatif). Les formules précédentes sont d'ailleurs encore valables pour des matrices rectangulaires quelconques, à condition que tous les produits qui y figurent soient définis; mais comme on a tendance à ne pas contrôler cette condition, on se méfiera de calculs trop hâtifs dans ce cas...

Comme on le vérifie aisément, le produit matriciel est «compatible» avec le produit (plus simple) par les scalaires défini plus haut, c'est-à-dire que

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

On peut résumer cette liste de résultats en disant que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est une algèbre (unitaire, non commutative) sur $\mathbf{K}$ ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$); ce vocabulaire (et un ensemble complet de définitions) sera précisé au chapitre suivant.

En pratique, il faut surtout retenir ce qui est légal et ce qui ne l'est pas dans les calculs matriciels : tout d'abord, la formule explicite étant très lourde, on essaiera en général de ne pas s'en servir pour le calcul; de nombreux exemples seront vus en exercice. Les calculs «algébriques» usuels restent valables, mais les simplifications dont on a l'habitude dans $\mathbf{C}$ ne se produisent plus : ainsi (en définissant $A^2 = AA$), on a bien $(A+B)^2 = A(A+B)+B(A+B) = A^2+B^2+AB+BA$, mais on ne peut pas regrouper les deux derniers termes en général; de même, on n'a plus $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$, si $AB \neq BA$. Le cas particulier $AB = BA$ est donc très important; on dit alors que les deux matrices A et B *commutent*; c'est en particulier le cas de toute matrice avec I, d'où des formules telles que $(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$ par exemple.

Certaines matrices jouent un rôle important dans la théorie (parce que les calculs où elles interviennent sont simplifiés) : ce sont les matrices *diagonales*, dont tous les éléments non diagonaux sont nuls (c'est-à-dire que $A = (a_{ij})$ est diagonale si $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$) et les matrices *triangulaires (supérieures)* dont tous les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls ($A = (a_{ij})$ est triangulaire supérieure si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$). On vérifiera par exemple que le produit de deux matrices triangulaires est lui-même triangulaire.

Un calcul direct permet de voir que la transposition est compatible avec le produit; plus précisément, on a la formule ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (on remarquera le renversement de l'ordre); il n'y a guère d'autres «formules» agréables, d'où l'intérêt des quelques cas particuliers connus; ainsi on définit la *trace* d'une matrice (carrée) comme la somme de ses éléments diagonaux (on la note $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$), et elle possède la propriété non évidente (c'est encore un exercice-type) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. D'autres formules concernant les déterminants seront obtenues au chapitre 20.

3. 3 Matrices inversibles.

Soit A une matrice (carrée) d'ordre n. On dira que A est *inversible* s'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$. On démontre que B est unique et que $BA = I_n$; on notera alors $B = A^{-1}$. (Une démonstration partielle sera faite en classe, mais on ne peut obtenir rigoureusement ce résultat qu'en utilisant les applications linéaires). Les matrices inversibles permettent une sorte de «division» dans $\mathcal{M}_n$, car si A est inversible, l'équation $AX = B$ équivaut à $X = A^{-1}B$; d'où on peut obtenir de nombreux résultats analogues aux propriétés de la division ordinaire. L'ensemble des matrices (carrées) inversibles forme un groupe (non commutatif), qu'on appelle le *groupe linéaire*, et qu'on note parfois $\mathcal{I}_n(\mathbf{R})$ (ou $\mathbf{GL_n}(\mathbf{R})$, quand on veut l'identifier au groupe linéaire du chapitre 19) ; en effet, on vérifie aisément que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, ce qui prouve que $\mathcal{I}_n(\mathbf{R})$ est stable pour la multiplication; les autres propriétés sont évidentes, comme on le verra en exercice.

Les matrices inversibles sont *régulières* : si on a $AB = AC$ et que A^{-1} existe, on obtient, en multipliant à gauche par A^{-1}, $B = C$ («simplification» par A) ; la réciproque est vraie, mais nous ne pourrons le démontrer qu'au chapitre 19.

De nombreuses propriétés «formelles» peuvent se déduire des règles de calcul usuelles pour des matrices qui commutent : ainsi, si $A^3 = O$ (on dit que A est nilpotente), on vérifie aisément que $A + I$ est inversible et a pour inverse $I - A + A^2$; d'autres exemples importants seront vus au chapitre 20.

3.4 Application à la résolution des systèmes.

Comme on l'a vu précédemment, tout système linéaire est équivalent à une équation matricielle de la forme $(\star)$ $MX = B$; si M est inversible (et donc en particulier s'il y a autant d'équations que d'inconnues), l'équation $(\star)$ équivaut à $X = M^{-1}B$, et possède donc une solution et une seule; on verra plus tard que ce résultat caractérise les matrices M inversibles. Le calcul explicite de M^{-1} (que nous avions évité jusqu'ici) en découle : il suffit de résoudre un système approprié, comme on le verra en exercice. Cette méthode est toutefois relativement inefficace, et nous verrons comment l'améliorer au chapitre 20. On voit aussi que si l'on dispose (comme c'est le cas sur certaines calculettes) d'un programme d'inversion de matrices, on a du même coup le moyen de résoudre numériquement tout système linéaire *à solution unique*; on dit que ce sont des systèmes *déterminés* (ou de Cramer).

3.5 Changement de base.

Montrons à présent comment utiliser les matrices de passage pour déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base. Si $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$ (c'est-à-dire que $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b}_i$), et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que, posant $P = (a_{ij})$, on a (pour tout i) $\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{b}'_j$), on voit que le vecteur-colonne X' des nouvelles coordonnées de $\mathbf{v}$ est donné par la formule $X' = PX$, où X est le vecteur-colonne des x_i. (Autrement dit, si $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{b}'_i$, on a $x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$). On en déduit aisément que Q, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, doit vérifier $X = QX'$, et par suite que P est inversible et que $Q = P^{-1}$ (ce qu'on peut aussi obtenir par application directe des définitions). On verra au prochain chapitre comment généraliser ces résultats à des changements de variables dans les équations linéaires.

Concluons en utilisant ces résultats pour déterminer la matrice $C = P(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3)$, connaissant $A = P(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ et $B = P(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$. Utilisant les vecteur-colonnes (et les notations) précédents, et appelant X'' le vecteur-colonne des coordonnées de $\mathbf{v}$ dans la base $\mathcal{B}_3$, on a donc $X'' = B^{-1}X' = B^{-1}A^{-1}X$ et $X'' = C^{-1}X$. On en déduit que $C = (B^{-1}A^{-1})^{-1} = AB$, et on obtient ainsi la «relation de Chasles» :

$$P(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3).$$

Exercices

1 ($\star\star$) Montrer que si A est symétrique, il en est de même de A^n. Soit A une matrice antisymétrique; montrer que A^n est antisymétrique si n est impair.

2 ($\star\star$) Soit A une matrice (quelconque) $n \times m$. Que valent AI_m et I_nA ? Supposons qu'il existe X (dont on précisera la taille) telle que AX soit une matrice unité. Cela entraîne-t-il que A soit inversible ? Supposons de plus qu'il existe Y telle que YA soit aussi une matrice unité. Montrer qu'alors $X = Y$. A et X commutent-elles dans ce cas ?

T 31 Soit A la matrice 2×2 définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que (I_2, A, A^2) est une famille liée de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, et en déduire que, pour tout n, on peut écrire $A^n = a_nI_2 + b_nA$; déterminer une relation de récurrence entre les a_i et les b_i, et en déduire une expression explicite des coefficients de A^n.

3 ($\star\star$) Calculer la matrice $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n$.

4 ($\star\star$) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ (matrices *circulantes*). Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Est-il stable pour la multiplication ?

5 ($\star\star$) Montrer que l'ensemble des matrices carrées (a_{ij}) d'ordre n telles que $a_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ? (on cherchera une interprétation géométrique de la condition $|i-j| \leq 1$).

6 ($\star\star$) Déterminer toutes les matrices A qui commutent avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et telles que $AM = O$. Vérifier qu'aucune de ces matrices n'est inversible; pourquoi était-ce prévisible ? ($* * *$) Même exercice avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7 ($\star$) Déterminer (en fonction de x) le rang de la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x & 1 \\ x & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix}$.

T 32 Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Remarquer que $(A - I_3)^3 = O_3$, et en déduire A^n pour tout n de $\mathbf{N}^*$. Peut-on prolonger ce résultat à $n \in \mathbf{Z}$?

8 ($\star\star$) Soit A une matrice (carrée) d'ordre n telle que $A^2 = I_n$ (matrice «involutive»). Montrer que A est régulière et que si P est inversible, on a $(PAP^{-1})^2 = I$; déterminer toutes les matrices diagonales telles que $A^2 = I_n$. Construire par cette méthode une matrice involutive d'ordre 3 non diagonale (on pourra par exemple prendre pour P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).

17. MATRICES

Plan

17. MATRICES

(Formulaire)

2 Définitions et notations.

Définition 2.1. *On appelle* **matrice** *à m lignes et n colonnes, à coefficients dans $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, une application de $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ dans K. L'image de (i, j) s'appelle l'***élément** *d'indices i et j, et se note (par exemple) a_{ij} ; la matrice entière sera donc notée $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.*

Définition 2.2. *L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes (appelées aussi par abréviation* **matrices** *$m \times n$), à coefficients dans K, se note $\mathcal{M}_{m,n}(K)$; les matrices pour lesquelles $m = n$ s'appellent des* **matrices carrées d'ordre** *n, et leur ensemble est noté $\mathcal{M}_n(K)$.*

Définition 2.3. *On appelle* **vecteurs-lignes** *les matrices de $\mathcal{M}_{1,n}(K)$ et* **vecteurs-colonnes** *celles de $\mathcal{M}_{m,1}(K)$.*

Définition 2.4. *On dit qu'une matrice carrée $M = (a_{ij})1 \leq i, j \leq n$ est* **diagonale** *si tous ses éléments non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire si $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. On dit qu'elle est* **triangulaire supérieure** *si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (et qu'elle est* **triangulaire inférieure** *si $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$).*

3 Opérations «linéaires» sur les matrices.

Définition 3.1. *On définit sur $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ une structure de K-espace vectoriel en posant $M + N = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} + (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $\lambda M = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.*

Définition 3.2. *Le «vecteur nul» de cette structure s'appelle la* **matrice nulle** *(de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$) et se note O_{mn} (ou O_n) ; c'est la matrice dont tous les éléments sont nuls.*

La structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ est «isomorphe» (voir ch. 18) à celle de K^{mn}, et en particulier il existe une base «canonique» formée des matrices M_{ij} dont seul l'élément d'indices i et j vaut 1, tous les autres étant nuls, et donc $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(K)) = mn$.

Définition 3.3. *On appelle* **transposée** *de la matrice $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice $n \times m$ définie par ${}^tM = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ avec (pour tout i et j, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) $b_{ij} = a_{ji}$.*

La transposition est compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire que ${}^t(M + \lambda N) = {}^tM + \lambda {}^tN$.

Définition 3.4. *On dit qu'une matrice M est* **symétrique** *si ${}^tM = M$, et qu'elle est* **antisymétrique** *si ${}^tM = -M$.*

4 Produit matriciel.

Définition 4.1. *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ (donc si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B), le* **produit matriciel** *AB (dans cet ordre) est défini, et si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq k\leq p}}$, on a $C = AB = (c_{ik})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq k\leq p}}$ définie par (pour tout i et k avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq k \leq p$) : $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.*

Définition 4.2. *On appelle* **matrice unité** *(de $\mathcal{M}_n(K)$) et on note I_n la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux valent 1.*

Le produit des matrices vérifie (quand il est défini) les formules suivantes :

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{(associativité)}$$

$$A(B+C) = AB+AC \quad (A+B)C = AC+BC \qquad \text{(distributivité à gauche et à droite)}$$

$$AI_n = I_mA = A \qquad \text{(existence d'un élément unité)}$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \qquad \text{(compatibilité des produits)}$$

qui, restreintes aux matrices carrées, leur donnent une structure de K-algèbre unitaire, mais **non commutative**.

Définition 4.3. *On dit que deux matrices A et B* **commutent** *si $AB = BA$.*

La transposition est «compatible» avec le produit : on a la formule ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (on remarquera le renversement de l'ordre).

Définition 4.4. *On dit qu'une matrice (carrée d'ordre n) M est* **inversible** *s'il existe une matrice (unique) N telle que $MN = NM = I_n$; on note alors M^{-1} la matrice N, appelée matrice* **inverse** *(de M).*

Si A et B sont inversibles, AB l'est aussi, et on a

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

L'ensemble des matrices inversibles forme (pour le produit) un groupe non abélien, noté $\mathcal{I}_n(K)$ (ou parfois $\mathbf{GL}_n(K)$). On démontre que «M inversible» équivaut à «M régulière», c'est-à-dire (pour toutes matrices carrées A et B) à $AM = BM \Rightarrow A = B$.

5 Représentations matricielles.

Définition 5.1. *Si $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_j)_{1\leq j\leq n}$ est une famille de vecteurs d'un espace $\mathcal{E}$ de dimension m, et si $\mathcal{B} = (\mathbf{b_i})_{1\leq i\leq m}$ est une base de $\mathcal{E}$, on appelle* **matrice représentative de la famille** *$\mathcal{F}$* **dans la base** *$\mathcal{B}$ la matrice $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ telle que (pour tous i et j) $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{b}_i$.*

Définition 5.2. *On appelle* **rang** *d'une matrice M le rang d'une famille de vecteurs qu'elle représente (ce qui ne dépend pas du choix de $\mathcal{E}$ ou de la base $\mathcal{B}$); on note ce nombre $\mathrm{rg}(M)$, et on démontre que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$.*

Définition 5.3. *On appelle* **matrice représentative d'un système** (S) *de* n *équations à* m *inconnues de la forme* $[\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i = b_j]_{1\leq j\leq n}$ *la matrice* $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ *; en appelant* X *le «vecteur-colonne des inconnues»* (x_i)*, et* B *le «vecteur-colonne des seconds membres»* (b_j)*, le système est équivalent à l'unique équation matricielle* $MX = B$*.*

Définition 5.4. *Soient* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux bases d'un espace vectoriel de dimension* n*. On appelle* **matrice de passage** *de* $\mathcal{B}_1$ *à* $\mathcal{B}_2$*, et on note* $P(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$*, la matrice qui représente la famille* $\mathcal{B}_2$ *dans la base* $\mathcal{B}_1$

Si $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{b}_i$, et si $P = (a_{ij})$ est la matrice de passage $P(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$, le vecteur-colonne X' des nouvelles coordonnées de $\mathbf{v}$ est donné par la formule $X' = PX$, o- X est le vecteur-colonne des x_i ; Q, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, vérifie $X = QX'$, et on en déduit que P est inversible et que $Q = P^{-1}$. On a de plus la «relation de Chasles» :

$$P(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3).$$