19. APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Définitions générales.

1.1 Applications linéaires.

On dit qu'une application d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ dans un espace vectoriel $\mathcal{F}$ est *linéaire* si elle est compatible avec les opérations, c'est-à-dire si (pour tous les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $\mathcal{E}$) elle vérifie $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})$ et (pour tout λ scalaire) $f(\lambda\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$. On vérifie aisément que c'est équivalent à la seule formule

$$(1) \qquad f(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + \lambda f(\mathbf{v})$$

On rencontre fréquemment de telles applications ; on pensera par exemple à la dérivation ou à l'intégration ($\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ étant des espaces de fonctions, et f une fonctionnelle) ; d'autres exemples importants seront vus plus loin.

1.2 Conséquences des définitions.

On voit aisément (en prenant $\lambda = 0$) que l'image du vecteur nul (de $\mathcal{E}$) doit être le vecteur nul (de $\mathcal{F}$) ; comme toujours, il suffit d'un contre-exemple pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, alors que la démonstration de la formule (1) doit être faite dans le cas général. On montrera en exercice que les seules applications linéaires de $\mathbf{R}$ dans lui-même sont les «homothéties» $x \mapsto ax$.

1.3 Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.

Le vocabulaire des applications linéaires utilise (sans grande justification à ce niveau) des termes spécifiques : un *endomorphisme* est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans lui-même, un *isomorphisme* est une application linéaire bijective, et un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif. On démontre (ce sera fait en classe) que la bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire (et donc un autre isomorphisme). L'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F se note $\mathcal{L}(E,F)$ (on verra plus loin que c'est aussi un espace vectoriel; remarquer l'écriture «simplifiée» des espaces E et F) ; et l'ensemble des endomorphismes de E est noté simplement $\mathcal{L}(E)$; enfin, on note parfois $\mathrm{Aut}(E)$ l'ensemble (dont nous verrons plus tard que c'est un groupe) des automorphismes de E.

Les applications linéaires de E dans $\mathbf{R}$ (ou plus généralement dans le corps des scalaires) s'appellent les *formes linéaires* de E et jouent un rôle important dans la théorie (dualité), mais qui ne sera qu'esquissé cette année.

1.4 Exemples.

Il est important de s'entraîner à la traduction de ces définitions dans différents langages ; des exemples variés seront vus plus loin et en exercice. On remarquera par exemple que si E est l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$, la «fonctionnelle» $D\colon f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E (qui n'est pas un automorphisme), et que l'application $I\colon f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ est une forme linéaire de E.

2 Image et noyau.

2.1 Sous-espaces définis par une application linéaire.

Soit S un sous-espace vectoriel de E, f une application linéaire de E dans F. L'ensemble des images des vecteurs de S par f (que l'on note $f(S)$ par abus de langage) est un sous-espace vectoriel de F, comme on le vérifiera en classe. En particulier, l'image de E tout entier est un sous-espace de F, qu'on appelle simplement l'image de f, et qu'on note généralement $\operatorname{Im} f$. Ainsi, f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(E) = F$.

2.2 Image et noyau.

De la même façon, l'ensemble des antécédents par f d'un sous-espace vectoriel S' de F est un sous-espace vectoriel de E (qu'on note souvent $f^{-1}(S')$, même si f n'est pas bijective). En particulier, $f^{-1}\big(\{\mathbf{0}_F\}\big)$ est le plus petit sous-espace de ce type; on l'appelle le *noyau* de f, et on le note $\operatorname{Ker} f$ (de l'allemand «Kernel»). $\operatorname{Ker} f$ est donc la «solution» de l'équation $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$; et c'est ce qui le rend si important dans les applications pratiques.

2.3 Relation avec la bijectivité, image d'une famille.

f est une injection si pour tout $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Or ($f$ étant linéaire), cette condition est équivalente à $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_F \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}_E$, autrement dit à $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$. De même, f sera un isomorphisme si $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$ et si $\operatorname{Im} f = F$. En résumé, la linéarité permet de prouver l'injectivité en n'étudiant que le cas de $\mathbf{0}_F$.

Supposons que f soit injective, et que $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)$ soit une famille libre de E. La famille $\mathcal{G} = (f(\mathbf{v}_i))$ est alors une famille libre de F; cela sera démontré en classe. On vérifiera par contre élémentairement que si $\mathcal{F}$ est génératrice de E, la famille $\mathcal{G}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, sans aucune hypothèse (autre que la linéarité) sur f.

Un important exemple est l'existence d'un isomorphisme entre deux espaces vectoriels de même dimension (finie). Soit en effet $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}'_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de f; l'application f définie par

$$f(\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{v}'_i$$

est linéaire et bijective, comme on le vérifie aisément à l'aide des critères précédents.

Utilisons tous ces résultats sur l'exemple, vu au chapitre 15, de l'application $c\ell_{\mathcal{F}}$ (allant de $\mathbf{K}^p$ dans E), définie par $c\ell_{\mathcal{F}}((a_i)_{1\leq i\leq p} \mapsto \sum_{i=1}^{p} a_i\mathbf{v}_i$ où $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille de E. Vérifions d'abord qu'elle est linéaire : on a bien, en effet, la propriété $c\ell_{\mathcal{F}}((a_i) + \lambda(b_i)) = \sum_{i=1}^{p}(a_i + \lambda b_i)\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{p} a_i\mathbf{v}_i + \lambda\sum_{i=1}^{p} b_i\mathbf{v}_i = c\ell_{\mathcal{F}}((a_i)) + \lambda c\ell_{\mathcal{F}}((b_i))$. Elle est injective si $\mathcal{F}$ est une famille libre, surjective si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice; enfin, c'est un isomorphisme si $\mathcal{F}$ est une base de E (et on voit donc bien qu'il y a un isomorphisme de $\mathbf{K}^p$ dans E si $\dim(E) = p$; c'est ce qui justifie le choix de notations similaires pour $(x_1, \cdots, x_p)$ (les vecteurs de $\mathbf{K}^p$) et $(x_1, \cdots, x_p)_{\mathcal{F}}$ (les coordonnées des vecteurs de E dans la base $\mathcal{F}$)). Plus généralement, l'image $\operatorname{Im} c\ell_{\mathcal{F}}$ est le sous-espace $\mathcal{V}\mathrm{ect}\,\mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{F}$, et le noyau $\operatorname{Ker} c\ell_{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des «relations» entre les vecteurs de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire l'ensemble des $(a_i) \in \mathbf{K}^p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} a_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}_E$.

2.4 Rang d'une application.

On appelle rang de f (noté $\mathrm{rg}(f)$) la dimension de $\mathrm{Im}\, f$; en pratique, cette notion s'utilise surtout quand la dimension de F est finie, et alors $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$. En utilisant les résultats précédents, on voit que le rang de f est le rang de la famille $(f(\mathbf{v}_i))$, où les $\mathbf{v}_i$ forment une base de E (si E est de dimension finie) ; ce qui prouve que $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$. Si f est surjective, $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$; on verra plus loin que f injective $\iff \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

3 Composition et opérations linéaires.

3.1 L'espace vectoriel des applications linéaires.

Si f et g sont deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E, F)$, on peut définir une nouvelle application h par la formule $h(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$, et on vérifie aisément que c'est encore une application linéaire, notée $f + g$. De même, la formule $k(\mathbf{v}) = af(\mathbf{v})$, où a est une constante (scalaire) définit une application linéaire notée af. Ces deux opérations sur les fonctions (vectorielles) ont les mêmes propriétés que celles sur les fonctions numériques, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ (muni de ces deux opérations) est un espace vectoriel. On vérifiera (ce n'est qu'un exercice de traduction) que si S est un sous-espace de E, $\mathcal{L}(S, F)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E, F)$.

3.2 L'algèbre des endomorphismes, le groupe des automorphismes.

Il est également élémentaire de vérifier que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $g \in \mathcal{L}(F, G)$, l'application composée $g \circ f$ est linéaire, et donc dans $\mathcal{L}(E, G)$. Les définitions montrent aussi qu'on a alors $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$ (à cause des propriétés générales des fonctions) et $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$ (à cause de la linéarité de g) ; on démontre de même que $(\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = \lambda(g \circ f)$; compte tenu de la propriété d'associativité $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, on voit que $\circ$ se comporte «comme» une multiplication (non commutative) ; si on se restreint aux endomorphismes de E, on obtient une structure d'algèbre (unitaire, en prenant pour unité l'application identique $\mathrm{Id}_E \colon \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$). Il s'avère souvent plus pratique de «calculer» directement dans cette algèbre (qui généralise le calcul matriciel, comme on le verra plus bas) ; un exemple classique, la notion de projecteur est étudié plus loin. Mais outre les difficultés déjà rencontrées avec les matrices ($g \circ f \neq f \circ g$ et $g \circ f = \tilde{0} \not\Rightarrow (f = \tilde{0})$ ou $(g = \tilde{0})$), on peut de plus avoir $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et pourtant $f \circ g \neq \mathrm{Id}_E$; un exemple (qui sera étudié plus précisément en classe) est $E = \mathbf{R}[X]$, $f : P \mapsto Q$ avec $Q(X) = XP(X)$, et $g : P \mapsto Q$ avec $Q(X) = \dfrac{P(X) - P(0)}{X}$.

Si on se restreint encore aux automorphismes, on obtient l'existence d'inverses pour l'opération $\circ$, c'est-à-dire que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$; la multiplication est «interne» puisque $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_E$ (mais pas l'addition, puisque $\mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective) ; et on obtient donc une structure de groupe (multiplicatif) non abélien, qu'on appelle le *groupe linéaire.*

3.3 Calculs d'images et de noyaux.

Pour des applications linéaires générales, la détermination de l'image ou du noyau peut s'avérer difficile ; pour démontrer un résultat donné de la forme $\mathrm{Im}\, f = A$, il faudra en général deux étapes : montrer que pour tout $\mathbf{v}$, $f(\mathbf{v})$ appartient à A (ce qui est le plus souvent facile), et montrer que pour tout élément de A, on peut trouver (au moins) un antécédent (c'est généralement plus délicat). De même, montrer que $\operatorname{Ker} f = B$ demande de prouver que si $\mathbf{v} \in B$, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_F$, et aussi que si $\mathbf{v} \notin B$, $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}_F$, ce qui est plus difficile.

En dimension finie, la situation est plus simple : si $\mathcal{B}$ est une base de E, on sait que $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$; le calcul de $\operatorname{Ker} f$ n'est pas aussi direct, mais il est en général possible de chercher les coordonnées des vecteurs qui s'y trouvent, autrement dit de résoudre un système linéaire (homogène, voir plus bas).

3.4 La formule du rang.

Restons en dimension finie. Soit $(\mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de $\operatorname{Ker} f$, et utilisons le théorème de la base incomplète pour construire une base de E de la forme $(\mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq n}$ (donc contenant la base de $\operatorname{Ker} f$). On voit aisément que la famille $f(\mathbf{v}_i)_{m+1\leq i\leq n}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$. Montrons qu'elle est libre : si une combinaison linéaire non triviale $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i)$ était nulle, on aurait (par linéarité) $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$ dans $\operatorname{Ker} f$, et ce vecteur serait non nul, ce qui est contradictoire avec la définition des $\mathbf{v}_i$. Ainsi, $\operatorname{Im} f$ a pour dimension $n - m$; on en déduit la **formule du rang**

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$$

(qui n'est valable que si E est de dimension finie, mais qui ne dépend pas de F).

La conséquence la plus importante de cette formule est qu'en dimension finie, si f est un endomorphisme injectif (et donc si $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$), f est un automorphisme (car alors $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$, ce qui prouve que f est surjective). On démontre de même que si f est un endomorphisme surjectif, f est un automorphisme.

3.5 Projecteurs.

On appelle *projecteur* un endomorphisme f tel que $f \circ f = f$. Soit S_1 et S_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. On sait que tout vecteur $\mathbf{v}$ de E s'écrit de manière unique $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, où $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ appartiennent respectivement à S_1 et S_2. Soit f l'application définie par $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1$. On vérifie (c'est un exercice classique) qu'elle est linéaire et que c'est un projecteur ; on l'appelle projection de E sur S_1 parallèlement à S_2. Réciproquement, si p est un projecteur, on démontrera en classe que $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = E$, et que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. Les projecteurs forment une classe importante d'endomorphismes, généralisant la notion de coordonnées en dimension infinie comme on le verra en Spé avec la notion de série de Fourier.

4 Représentations matricielles.

4.1 Représentation d'une application linéaire.

En dimension finie, soit $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_i)_{1\leq i\leq m}$ et $\mathcal{B}' = \mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq n}$ des bases de E et F. On peut écrire $f(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{v}_j$. Représentons la famille des $f(\mathbf{u}_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ par la matrice $M = (a_{ji})$: on dira que cette matrice représente f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (on remarquera que les colonnes de M représentent les images des $\mathbf{u}_i$, et que M est donc une matrice $n \times m$). Soit alors V un vecteur-colonne correspondant au vecteur $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} c_i\mathbf{u}_i$, on vérifie aisément que $f(\mathbf{x})$ a pour coordonnées (dans la base $\mathcal{B}'$) les éléments du vecteur-colonne $W = MX$. Réciproquement, étant donnée une matrice M (et des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$), elle définit une application f, dite *associée* à M ; les exemples qui ont été donnés en dimension finie au début du chapitre sont tous de cette forme, qu'on analysera plus loin.

4.2 Isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et de $\mathcal{M}_n$.

Plus précisément encore, cette représentation n'est pas un simple codage, mais reflète aussi les propriétés des opérations : si A et B représentent f et g (dans les mêmes bases), $A + \lambda B$ représente $f + \lambda g$ (ce qui est assez évident) et BA représente $g \circ f$ (ce qui est plus inattendu, et sera démontré en classe). Si on se restreint aux endomorphismes de E, et qu'on choisit $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on obtient une correspondance entre les matrices carrées de $\mathcal{M}_n$ et les endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$; notons-là Φ ($\Phi(M)$ est donc l'endomorphisme associé à M); on a alors $\Phi(A + \lambda B) = \Phi(A) + \lambda\Phi(B)$, et comme Φ est bijective (puisque $\Phi^{-1}(f)$ est la matrice qui représente f dans la base $\mathcal{B}$), Φ est donc un isomorphisme. En fait, on a aussi la propriété de «conservation du produit» $\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B)$; on dit que Φ est un isomorphisme d'algèbres. On obtient ainsi $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \dim(F)$ et $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$.

4.3 Changement de base, matrices semblables.

Examinons à présent l'effet d'un changement de base sur cette représentation. On a vu que si V (vecteur-colonne) représente un vecteur dans la base $\mathcal{B}$, on obtient les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}'$ par PV, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ (rappelons que c'est la matrice de la famille $\mathcal{B}$ représentée dans la base $\mathcal{B}'$). On peut aussi remarquer que la matrice de passage P^{-1} de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ représente l'application identité de E (muni de la base $\mathcal{B}'$) en prenant pour espace F l'espace E muni de la base $\mathcal{B}$. On en déduit (ce sera fait en classe) que si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de E, et si $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$ sont des bases de F, la matrice B qui représente l'application f dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$ est obtenue à partir de A, qui représente f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ par la formule (dite de changement de base)

$$B = Q^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'_1$ à $\mathcal{B}'_2$.

En particulier, pour des endomorphismes représentés dans la même base de départ et d'arrivée, on aboutit à

$$B = P^{-1}AP.$$

Les deux matrices A et B, qui représentent donc la même application linéaire dans des bases différentes, sont dites *semblables*; et possèdent de nombreuses propriétés communes; par exemple on vérifiera aisément que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$, formule que nous utiliserons au prochain chapitre pour calculer le rang par la méthode du pivot.

5 Équations linéaires.

5.1 Formes linéaires, noyau d'une forme.

Utilisons les résultats précédents pour étudier les formes linéaires d'un espace E de dimension finie n. Si la forme f n'est pas identiquement nulle, on doit avoir $\mathrm{Im}\, f = \mathbf{R}$, et donc d'après la formule du rang $\dim \mathrm{Ker}\, f = n - 1$, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}\, f$ est un hyperplan de E. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_i)_{1 \le i \le n}$ une base de E, et $a_i = f(\mathbf{v}_i)$. On voit que si $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i$, on aura $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, et donc que $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\, f \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$; cette dernière formule est donc une équation (cartésienne) de l'hyperplan $\mathrm{Ker}\, f$. Réciproquement, on peut montrer que tout hyperplan de E peut être représenté de cette manière (il suffit de déterminer un sous-espace supplémentaire (qui par définition sera donc une droite vectorielle) et de prendre pour f le projecteur sur cette droite, ou plus précisément la coordonnée de l'image dans une base de la droite); dans une base donnée, toutes les équations cartésiennes ainsi obtenues sont proportionnelles.

5.2 Équations d'un sous-espace vectoriel.

Plus généralement, soit f_1, f_2, $\dots f_k$ un ensemble de formes linéaires sur E. Les noyaux de ces formes ont pour intersection un sous-espace de E, qui correspond donc à la résolution du système des k équations cartésiennes associées. Il n'est pas possible de représenter un espace S de dimension $d < n-1$ par une seule équation cartésienne, mais on démontre qu'on peut toujours trouver un système de $n-d$ équations qui le représente (cela revient à montrer que S est intersection de $n-d$ hyperplans); on n'a pas cette fois unicité du système (mais les équations d'un système se déduisent par combinaison linéaire de celles d'un autre).

5.3 Systèmes linéaires, «formules» d'une application linéaire.

Soit (S) un système linéaire de m équations à n inconnues de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

de matrice $M = (a_{ij})$. Si on se place dans les espaces $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ (munis des bases canoniques), soit f l'application linéaire associée à M. On vérifie aisément que dire que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est solution de (S), c'est dire que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Réciproquement, toute application linéaire peut donc être représentée par des «formules», c'est-à-dire par m formes linéaires correspondant aux coordonnées de $f(\mathbf{v})$ dans la base de l'espace d'arrivée; une lecture de la matrice M montre alors que les colonnes représentent les images par f des vecteurs de la base de départ, et les lignes représentent les «formules» de f.

5.4 Théorie générale des équations linéaires.

Nous pouvons à présent achever la théorie des équations linéaires : on voit qu'après un codage convenable, il s'agit de résoudre une équation de la forme $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, où f est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathbf{x}$ est un vecteur inconnu de E, et $\mathbf{b}$ un vecteur donné de F. On voit d'abord que $\mathbf{b}$ doit être dans $\operatorname{Im} f$; si alors $\mathbf{x}_0$ est une «solution particulière», l'équation se ramène à $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, et donc à $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in \operatorname{Ker} f$; en définitive, il suffit donc de résoudre $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (système «homogène», ou «sans second membre»). Comme on l'a vu en étudiant les équations différentielles, la théorie algébrique ne peut rien dire de plus en général; en dimension finie, les formules du rang permettent d'aller un peu plus loin, et en particulier de prévoir à l'avance le «nombre» des solutions, quand on connaît le rang du système (S).

Exercices

1 Définitions générales.

1 ($\star$) Étudier l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $f((x,y,z)) = (x+y, y+z)$ (est-elle linéaire ? est-ce un isomorphisme ?)

2 ($\star\star$) Soit A une matrice carrée d'ordre n fixée. Montrer que l'application f de $\mathcal{M}_n$ dans lui-même définie par $f\colon M \mapsto f(M) = AM$ est un endomorphisme. A quelle condition sur A est-ce un automorphisme ?

3 ($\star$) Montrer que l'application qui à un polynôme P associe sa dérivée en 0 ($P'(0)$) est une forme linéaire (préciser les ensembles). Est-elle surjective ? bijective ?

2 Images et noyaux, rang.

4 ($\star$) Soit f une forme linéaire non nulle, déterminer son image.

5 ($\star\star$) Soit f une forme linéaire de $\mathcal{E}$ non nulle, $\mathbf{v}$ un vecteur de $\mathcal{E}$ tel que $f(\mathbf{v}) \neq 0$; montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\langle\{\mathbf{v}\}\rangle$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{E}$.

6 ($\star\star$) Déterminer le rang de l'application f ($\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$) donnée par :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1)$$

(on vérifiera qu'elle est linéaire, et on distinguera le cas n pair du cas n impair).

> **T 34** Soit Φ l'application de $\mathbf{R}[X]$ dans lui-même définie par $\Phi(P) = Q$ tel que (pour tout $x \in \mathbf{R}$) $Q(x) = P(x) - P(x-1)$. Montrer que Φ est un endomorphisme dont on déterminera le noyau. En utilisant Φ_n, restriction de Φ à $\mathbf{R}_n[X]$, montrer que Φ est une surjection, et en déduire pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ l'existence d'un polynôme unique, B_n, tel que $B_n(x) - B_n(x-1) = x^n$ et que $B_n(0) = 0$. Montrer enfin que B_n est divisible par $X+1$, et, en étudiant le polynôme C défini par $C(x) = -B_{2n}(-1-x)$, montrer que B_{2n} est divisible par $2X+1$.

7 ($\star\star$) Soit f l'application de $\mathbf{R}[X]$ dans lui-même qui au polynôme P associe $f(P) = P - P'$. Montrer que c'est un endomorphisme injectif. Peut-on conclure que f est un automorphisme ? Étudier les restrictions f_n de f à l'ensemble $\mathbf{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$, et conclure.

3 Propriétés algébriques, projecteurs.

8 ($\star$) Soit f un automorphisme involutif ($f = f^{-1}$) d'un espace E. Montrer que si g est un automorphisme de E, $g^{-1} \circ f \circ g$ est aussi involutif.

9 ($\star\star$) De même, si p est un projecteur de E et si g est un automorphisme, montrer que $g^{-1} \circ p \circ g$ est encore un projecteur. Montrer que le rang de p est égal au rang de $g^{-1} \circ p \circ g$.

T 35 Soit E un K-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E qui commutent (c'est-à-dire que $p \circ q = q \circ p$). Montrer que $r = p \circ q$ et $s = p + q - r$ sont des projecteurs, dont on déterminera les images et les noyaux en fonction de ceux de p et q.

10 ($\star\star$) Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f = \lambda \, \mathrm{Id}_E$, avec $\lambda \neq 0$ (pour un certain $n \geq 1$). Montrer que f est un automorphisme.

4 Représentations matricielles.

T 36 Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ représenté, dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, par la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de f (selon α), et expliciter, dans les différents cas, une base de l'image et une base du noyau de f. On suppose désormais que α est non nul ; on pose $\varepsilon_1 = \lambda \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_4$, où λ est un nombre réel, $\varepsilon_2 = \mathbf{e}_2$, $\varepsilon_3 = \mathbf{e}_3$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$; on appelle F l'image de f. Déterminer λ pour que $\mathcal{B}$ soit une base de F. Supposant λ ainsi fixé, soit g la restriction de f à F. Montrer que g est un endomorphisme de F, et déterminer N, la matrice représentative de g dans la base $\mathcal{B}$; montrer que N est inversible.

11 ($\star\star$) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, f l'application de $\mathcal{E} = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ dans lui-même définie par $f(M) = AM$; montrer que f est un endomorphisme, et déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{E}$. En déduire le rang de f en fonction du rang de A.

12 ($\star\star\star$) Soit f l'application de $\mathbf{R}_3[X]$ dans lui-même définie par $f(P) = Q$ tel que $Q(X) = \dfrac{P'(1) - P(1)}{2} X^3 + \dfrac{3P(1) - P'(1)}{2} X$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$, et utiliser la matrice représentative de f dans la base canonique pour montrer que f est un projecteur.

19. APPLICATIONS LINÉAIRES

Plan

19. APPLICATIONS LINÉAIRES

(Formulaire)

1 Définitions générales.

Définition 1. 1. *On appelle* **application linéaire** *d'un espace vectoriel* $\mathcal{E}$ *dans un espace vectoriel* $\mathcal{F}$ *une application de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{F}$ *telle que, pour tous les vecteurs* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *de* $\mathcal{E}$ *et pour tout scalaire* λ, *on ait* $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ *et* $f(\lambda\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$, *ce qui est équivalent à la seule formule* $f(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + \lambda f(\mathbf{v})$.

Définition 1. 2. *On appelle* **endomorphisme** *de* $\mathcal{E}$ *une application linéaire de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$ *; on appelle* **isomorphisme** *de* $\mathcal{E}$ *vers* $\mathcal{F}$ *une bijection linéaire de* $\mathcal{E}$ *vers* $\mathcal{F}$*; un endomorphisme bijectif de* $\mathcal{E}$ *s'appelle un* **automorphisme** *de* $\mathcal{E}$. *Les applications linéaires de* $\mathcal{E}$ *vers* K *(le corps des scalaires) s'appellent des* **formes linéaires** *de* $\mathcal{E}$.

Définition 1. 3. *L'ensemble des applications linéaires de* E *vers* F *se note* $\mathcal{L}(E,F)$ *; l'ensemble des endomorphismes de* E *se note* $\mathcal{L}(E)$. *On note* $\mathrm{Aut}(E)$ *l'ensemble des automorphismes de* E.

2 Image et noyau.

Définition 2. 1. *Soit* f *une application linéaire de* $\mathcal{L}(E,F)$. *On appelle* **image** *de* f, *et on note* $\mathrm{Im}(f)$, *le sous-espace vectoriel de* F *formé des images des vecteurs de* E *par* f *; ainsi,* $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(f) \iff (\exists \mathbf{u} \in E)(f(\mathbf{u}) = \mathbf{v})$. *On appelle* **noyau** *de* f, *et on note* $\mathrm{Ker}(f)$, *le sous-espace vectoriel de* E *formé des vecteurs* $\mathbf{u}$ *de* E *tels que* $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F$.

Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est surjective si $\mathrm{Im}(f) = F$; f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.

L'image d'une famille génératrice de E par une application linéaire f est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$; l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

Deux espaces de même dimension finie sont isomorphes, en effet, l'application f qui associe à $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} a_i\mathbf{b}_i$ le vecteur $f(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} a_i\mathbf{b'}_i$ (o- $(\mathbf{b}_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\mathbf{b'}_i)_{1\leq i\leq n}$ sont respectivement des bases de E et F) est un isomorphisme.

Définition 2. 2. *On appelle* **rang** *de* f *la dimension (finie ou infinie) de* $\mathrm{Im}(f)$

En dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ injective $\iff$ $\dim(E) = \mathrm{rg}(f)$; f surjective $\iff$ $\dim(F) = \mathrm{rg}(f)$. Plus généralement, si E est de dimension finie (et F quelconque), on a la **formule du rang** : $\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

3 L'algèbre des applications linéaires.

Définition 3. 1. *On définit la* **somme** *de deux applications linéaires* f *et* g *de* $\mathcal{L}(E,F)$ *par la formule* $(f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})$ *(pour tout vecteur* $\mathbf{u}$ *de* E*). De même, on pose* $(\lambda f)(\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$.

Muni de ces deux opérations, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est un K-espace vectoriel, dont la dimension est $\dim(E) \times \dim(F)$ en dimension finie.

La composée $g \circ f$ de deux applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, G)$. L'espace des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$, muni des opérations linéaires (+ et .), et de la composition, est une K-algèbre unitaire non commutative (l'élément unité étant l'application identique Id_E).

Définition 3. 2. *Pour la seule composition, l'ensemble des automorphismes de E forme un groupe, qu'on appelle le* **groupe linéaire** *de E.*

Définition 3. 3. *On appelle* **projecteur** *(de E) un endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.*

Si p est un projecteur de E, on a $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

4 Représentations matricielles.

Définition 4. 1. *Si f est une application linéaire de E vers F, de dimensions finies, et que $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $\mathcal{B}' = (\mathbf{b}'_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont (respectivement) des bases de E et F, on appelle* **matrice représentative de** *f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (et on note $A = M_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f)$) la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ (on remarquera l' «inversion» de m et n : $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$) définie par (pour tout $i \in [\![1, m]\!]$) $f(\mathbf{b}_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \mathbf{b}'_k$.*

Si V est le vecteur-colonne correspondant au vecteur $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{b}_i$, $f(\mathbf{v})$ a pour coordonnées (dans la base $\mathcal{B}'$) les éléments $\sum c_i a_{ji}$ du vecteur-colonne $W = MV$.

Définition 4. 2. *Réciproquement, si $M = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ (et $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_i)_{1 \leq i \leq m}$, $\mathcal{B}' = (\mathbf{b}'_j)_{1 \leq j \leq n}$ des bases de E et F), l'application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ ainsi définie (et donc telle que $f(\sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{b}_i) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ji} \mathbf{b}'_j))$ s'appelle* **l'application associée à** *M (dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$).*

Ce codage réalise un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,m}(K)$, c'est-à-dire que si f et g sont (respectivement) associées à A et B, l'application $g \circ f$ (si elle est définie) est associée au produit BA. On en déduit en particulier que f est un isomorphisme si et seulement si la matrice associée est inversible.

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de E, et si $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$ sont des bases de F, la matrice $B = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}(f)$ est obtenue à partir de $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}(f)$ par la **formule de changement de base** $B = Q^{-1}AP$, o- P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'_1$ à $\mathcal{B}'_2$. En particulier, si f est un endomorphisme de E, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)P$.

Définition 4. 3. *Deux matrices (carrées) A et B telles qu'il existe P inversible et que $B = PAP^{-1}$ sont dites* **semblables**.