20. DÉTERMINANTS

1 Transformations élémentaires.

1.1 Transformations de familles.

Partons d'une famille $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)$ donnée. Nous allons montrer que la famille $\mathcal{F}'$ obtenue en remplaçant $\mathbf{v}_1$ par une combinaison linéaire $\mathbf{v}'_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{v}_i$, où a_1 **n'est pas nul**, a le même rang que $\mathcal{F}$. Cela revient à montrer que $\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \mathcal{F}' \rangle$, or il est clair que toute combinaison linéaire de $\mathcal{F}'$ est une combinaison linéaire de $\mathcal{F}$; réciproquement, comme on peut écrire $\mathbf{v}_1$ comme $\dfrac{1}{a_1}\left(\mathbf{v}'_1 - \sum_{i=2}^{k} a_i \mathbf{v}_i\right)$, on voit que les combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$ sont engendrées par $\mathcal{F}'$. Une suite quelconque de telles transformations (et de permutations éventuelles des vecteurs de $\mathcal{F}$) conservera donc le rang ; on voit que si l'on parvient ainsi à obtenir une famille assez simple (par exemple une partie d'une base canonique), on en déduira le rang de $\mathcal{F}$.

1.2 Transformations élémentaires de matrices.

Le rang d'une matrice étant défini comme celui de la famille de ses vecteurs-colonnes (et aussi, comme on l'a vu, de la famille de ses vecteurs-lignes), on peut «remplacer» la matrice par celle formée par une famille transformée comme précédemment, sans changer le rang. On dit que deux matrices qui sont obtenues l'une à partir de l'autre par une telle suite de transformations sont *équivalentes* (ne pas confondre avec les matrices semblables, comme on le verra plus bas) ; et elles ont donc le même rang par définition.

De façon plus précise, on appelle transformation élémentaire d'une matrice l'une des deux opérations suivantes : l'échange de deux lignes (ou de deux colonnes), noté $L_i \leftrightarrow L_j$ (ou $C_i \leftrightarrow C_j$), et le remplacement d'une ligne par une combinaison linéaire de lignes contenant cette ligne avec coefficient **non nul** (ou l'opération correspondante sur les colonnes), notée $L_i \to aL_i + \sum b_j L_j$ (ou $C_i \to aC_i + \sum b_j C_j$). Ainsi, on pourra écrire une chaîne de transformations telle que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ces transformations sont d'ailleurs «réversibles», puisque $L_i \to aL_i + \sum b_j L_j$ a pour transformation «inverse» $L_i \to (1/a)L_i + \sum(-b_j/a)L_j$; d'où la notion d'équivalence déjà mentionnée.

1.3 Rang de matrices triangulaires : la méthode du rang.

On a vu qu'une matrice (carrée d'ordre n) triangulaire supérieurs à coefficients diagonaux non nuls est de rang n (car il est aisé de prouver par récurrence que la famille de ses vecteurs-colonnes est libre, et le résultat s'en déduit d'après la formule du rang). Plus généralement, si on a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où les a_{ii} sont tous non nuls, son rang est égal à m; la méthode du rang consiste à ramener (par transformations élémentaires) la matrice étudiée à une matrice équivalente de cette forme, éventuellement bordée de matrice(s) nulle(s); le rang est alors égal au nombre d'éléments (non nuls) de la «diagonale».

2 Méthode du pivot de Gauss.

2.1 Transformations élémentaires de systèmes linéaires.

Nous allons à présent transformer des systèmes d'équations linéaires; on ne s'intéresse évidemment qu'aux transformations qui conservent les solutions, c'est-à-dire que les solutions du second système doivent être exactement celles du premier. Il est clair qu'on peut échanger l'ordre des équations (ce qui n'a en pratique qu'un intérêt de meilleure lisibilité du système); on va montrer que le système obtenu en remplaçant une des équations par une «combinaison linéaire» d'équations la contenant est équivalent au premier. Pour être plus précis, notons $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i$ la i-ème équation d'un système linéaire (S) à m équations et n inconnues (f_i est donc une forme linéaire de $\mathbf{R}^n$); le système (S') obtenu en remplaçant $f_i = b_i$ par $af_i + \sum\limits_{j\neq i} c_j f_j = ab_i + \sum\limits_{j\neq i} c_j b_j$ (avec $a \neq 0$) est équivalent au premier; en effet, il est clair que si (x_i) est solution de (S), il sera aussi solution de (S'), réciproquement, il suffit de remarquer qu'on peut retrouver (S) par une opération de même forme (remplacer $f'_i = b'_i$ par $(1/a)f'_i + \sum\limits_{j\neq i}(-c_j/a)f'_j = (1/a)b'_i + \sum\limits_{j\neq i}(-c_j/a)b'_j$, avec des notations évidentes). L'idée générale, qui sera précisée au prochain paragraphe, est donc de transformer (S) jusqu'à obtenir un système dont la résolution soit élémentaire.

2.2 Méthode du pivot.

En codant le système (S) par la matrice de ses coefficients, on voit que les transformations dont on vient de parler correspondent à des transformations élémentaires sur les lignes (échanges et combinaisons linéaires); si on prend la matrice obtenue à partir de celle des coefficients en adjoignant (traditionnellement à droite) la colonne des b_i, les transformations du système (S) sont exactement celles de cette matrice. Supposons alors d'abord que $a_{11} \neq 0$. On peut remplacer (successivement, mais c'est équivalent à le faire simultanément) la ligne L_i (pour $i > 1$) par $(\star)L_i - (a_{i1}/a_{11})L_1$, ce qui revient à fabriquer une matrice (et un système (S')) équivalente, dont la première colonne est $(a_{11}, 0, \dots, 0)$. Si alors a'_{22} n'est pas nul, on recommence (annulant ainsi les éléments de la deuxième colonne «en dessous» de a'_{22}), et par récurrence on aboutit à une matrice «triangulaire». Supposons à présent qu'à une étape donnée, on ait $a_{kk} = 0$. Alors, ou bien tous les éléments a_{kj} (pour $j \geq k$) sont nuls, ou bien on peut effectuer l'opération après avoir permuté les lignes k et j. L'élément a_{kj} (non nul) finalement utilisé dans la substitution de lignes $(\star)$ s'appelle un *pivot*; et on peut en fait le choisir arbitrairement (après l'avoir amené sur la diagonale); la méthode ainsi esquissée (l'algorithme rigoureux est un peu délicat à décrire) s'appelle méthode du pivot (de Gauss), et en pratique (informatique) on essaie de choisir le pivot suivant certains critères plus précis (pour améliorer la précision, ou simplifier les calculs), mais ces optimisations de la méthode sont hors-programme.

Quel que soit le choix exact des pivots, on aboutit finalement à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{kk} & \cdots & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$$

(où les a'_{ii} sont non nuls pour $i \leq k$); il faudra en général pour y parvenir échanger certaines colonnes (comme on le verra en classe), ce qui revient à changer l'ordre des inconnues du système (S). On étudiera à titre d'exercice la signification de transformations plus générales sur les colonnes (elles correspondent à des changements (linéaires) d'inconnues), mais elles ne sont pas nécessaires pour pouvoir mettre en œuvre la méthode du pivot.

Il ne reste plus qu'à résoudre le système correspondant à cette nouvelle matrice. On voit d'abord que si les b'_i (pour $i > k$) ne sont pas tous nuls, le système n'a pas de solution; sinon, on peut prendre arbitrairement les valeurs de X_i pour $i > k$ (ne pas oublier qu'il ne s'agit peut-être pas des inconnues initiales, mais qu'elles ont pu être permutées), et par récurrence on obtient les autres X_i (car $X_i = (1/a'_{ii})(b'_i - \sum_{j>i} a'_{ij}X_j)$). (La «dimension» $m-k$ de l'ensemble des solutions correspondant bien à la formule du rang). On dit qu'on a ramené (S) à un système triangulaire.

Il est en fait possible de pousser plus loin la réduction du système (ou de la matrice) : on verra en exercice qu'il est possible de continuer par une récurrence analogue à celle qu'on vient de décrire, et que cela permet en fait d'obtenir tous les a_{ij} non diagonaux nuls (et tous les a_{ii} égaux à 1 ou 0); mais cette ultime réduction n'a guère d'importance qu'en théorie, et pour le calcul «informatique» de l'inverse qu'on va voir au prochain paragraphe.

2.3 Conséquences; calcul de l'inverse.

On peut automatiser complètement la méthode décrite plus haut (c'est ainsi que sont construits les programmes commerciaux (calculettes) de résolutions de systèmes) quand on sait que le procédé donne une solution unique, autrement dit que le système est formé de n équations à n inconnues (et de rang n). Une technique plus précise, utilisant pour les b_i de nouvelles inconnues X_i aboutit au calcul de la matrice inverse; sa mise en œuvre pratique (consistant en fait à «accoler» à la matrice initiale une matrice unité) sera vue en TD. Il est possible aussi (comme on le verra en exercice) d'interpréter les transformations élémentaires par des formules de calcul matriciel; on aboutit ainsi (par d'autres moyens) à la démonstration de ce que M équivaut à N si $M = PNQ$ (où P et Q sont des matrices (carrées) inversibles), ce qui justifie la conservation du rang, et peut s'interpréter (dans le langage du précédent chapitre) en disant que deux matrices sont équivalentes si elle représentent la même application linéaire (dans des bases différentes). Mais le détail de cette théorie est lui aussi hors-programme.

3 Déterminants.

Le programme «officiel» n'envisage (en Sup) que l'étude des déterminants d'ordre 2 et 3; l'intérêt de cet «allègement» semble faible, mais cela explique dans ce qui suit les nombreux paragraphes marqués d'un filet; pour respecter le programme à la lettre, il suffit de ne lire que la définition (les «formules de Sarrus») du paragraphe 3, mais cela risque de s'avérer nuisible par la suite ...

3.1 Définition.

On a constaté à plusieurs reprises au cours des chapitres précédents l'apparition de constantes liées au calcul d'inverses de matrices, dont la valeur $ad-bc$ pour les matrices 2×2 est la plus connue. Une analyse soignée du problème arrive à montrer qu'il existe une fonction unique définie pour toute famille $\mathcal{F} = \mathbf{v}_i$ de n vecteurs (de $\mathbf{K}^n$, avec $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et à valeurs dans $\mathbf{K}$, et ayant les propriétés suivantes : $f(\mathcal{B}) = 1$ (où $\mathcal{B}$ est la base canonique); $f(\mathbf{v}_1+\lambda\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)+\lambda f(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ («multi-linéarité») et $f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = -f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n)$ («alternance» : on dit que f est une «forme multilinéaire alternée»); on l'appelle le déterminant de la famille $\mathcal{F}$. La démonstration d'existence et d'unicité sera faite en Spé, nous allons nous contenter de montrer comment effectuer le calcul en pratique.

On commence par se ramener aux matrices, en appelant *déterminant* d'une matrice carrée M le déterminant de la famille des vecteurs-colonnes de M (dans la base canonique); c'est donc une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ vers $\mathbf{K}$, dont on démontre qu'elle a les propriétés suivantes : $f(MN) = f(M)f(N)$, $f(aM) = a^n f(M)$, $f({}^tA) = f(A)$, et telle que M inversible $\iff f(M) \neq 0$ (toutes ces propriétés découlent de la définition, mais la plupart des démonstrations sont hors-programme). $f(M)$ se note $\det M$, et si M est représenté par le tableau (a_{ij}) (entre parenthèses), on note $\det M$ par le même tableau entre barres, comme ceci :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

Une conséquence importante de la propriété $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (le déterminant étant donc un morphisme de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \times)$ vers $(\mathbf{K}, \times)$) est que $\det(P^{-1}MP) = \det(M)$; compte tenu de la formule du changement de base, on voit que le déterminant de la matrice représentative d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie pour représenter celui-ci; ainsi, si M représente l'endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$ donnée, on notera $\det(f) = \det(M)$, et on dira que c'est le déterminant de l'endomorphisme f.

3.2 Calcul par transformations élémentaires.

Le point essentiel est que le déterminant est modifié de façon simple dans une transformation élémentaire; c'est une conséquence de la définition (si on admet que $\det M = \det{}^t M$) que dans un échange de lignes ou de colonnes, le déterminant change de signe, et que dans une substitution de la forme $L_i \to aL_i + \sum\limits_{j\neq i} b_j L_j$, le déterminant est multiplié par a. On en déduit des «calculs enchaînés» tels que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{C_3\to C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Bien entendu, l'idée est de se ramener à des matrices plus simples; on démontre en particulier que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale; la méthode du pivot permet donc en principe de calculer le déterminant de toute matrice; on verra cependant aux prochains paragraphes quelques raccourcis utiles.

3.3 Mineurs, cofacteurs, développements en lignes et colonnes.

On appelle mineur de l'élément a_{ij} d'une matrice M et on note A_{ij} la sous-matrice de M obtenue en supprimant la ligne L_i et la colonne C_j contenant cet élément. On démontre (par une analyse soignée de la méthode du pivot) la formule suivante, dite de développement du déterminant suivant la ligne i :

$$\det M = (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} \det A_{ij}$$

Ainsi, on aura par exemple (développement suivant la troisième ligne)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

Par transposition, une formule analogue en découle, dite de développement suivant la colonne j :

$$\det M = (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij} \det A_{ij}$$

On simplifie souvent ces écritures en posant $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, nombre qu'on appelle le *cofacteur* de a_{ij}, et obtenant ainsi par exemple $\det M = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$. On verra en classe leur mise en œuvre, mais il est clair qu'elles sont surtout intéressantes quand tous les termes d'une colonne (ou d'une ligne) sauf un sont nuls, car elles se réduisent alors à $\det M = a_{ij} C_{ij}$, c'est-à-dire qu'on a diminué l'ordre de M ; cette méthode est donc appliquée en combinaison avec des transformations élémentaires bien choisies (on dit qu'on fait «apparaître des zéros»).

3.4 Formule de Sarrus et autres cas particuliers.

Un calcul direct donne alors $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, puis (en développant suivant les lignes) la formule de Sarrus

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ &= ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a'bc'' - ab''c' - a''b'c, \end{aligned}$$

qu'on apprend d'habitude par une «règle des diagonales», extrêmement dangereuse, car elle ne se généralise pas au cas des déterminants d'ordre ≥ 4. La formule générale (qui sera vue en Spé, et s'obtient par récurrence à partir de développements suivants les lignes) n'a de toute façon que peu d'intérêt pratique : elle comporte en effet $n!$ termes... Inversement, on retiendra que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de la diagonale, et aussi la formule $\det(aM) = a^n \det(M)$; et on pensera, quand les coefficients ne sont pas des nombres explicites, à ne pas utiliser systématiquement la règle de Sarrus, mais à transformer d'abord éventuellement la matrice. On est enfin souvent amené (par exemple pour le calcul des valeurs propres, qu'on verra plus bas) à chercher une forme factorisée d'un déterminant ; on pensera à mettre en facteur un facteur commun à tous les éléments d'une même ligne (ou d'une même colonne), après transformations élémentaires. Un bon exemple est le calcul (détaillé dans l'exercice-type n° 37) du déterminant de Vandermonde $\det((a_i^j)_{1 \leq i,j \leq n})$.

4 Régularité et systèmes de Cramer.

4.1 Déterminant et rang.

Comme on l'a dit plus haut, le déterminant d'une famille est non nul si et seulement si cette famille est une base; de même, $\det M = 0 \iff M$ non inversible, et (si f est un endomorphisme) $\det(f) \neq 0 \iff \mathrm{rg}(f) = n$. (Cette dernière formule équivaut aussi à $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}\} \iff \det(f) = 0$).

4.2 Résolution des systèmes déterminés : formules de Cramer.

Soit alors à résoudre un système *déterminé*, c'est-à-dire dont la matrice des coefficients $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est carrée et régulière; on montrera alors (en Spé) que la matrice inverse est égale à la matrice des cofacteurs $(C_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, divisée par le déterminant de M; on en déduit les «formules de Cramer» : si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est solution de (S), $x_k = \det M_k / \det M$, où M_k est la matrice obtenue à partir de M en remplaçant la $k^{\text{ème}}$ colonne par le vecteur-colonne des seconds membres (cette formulation sera explicitée (et démontrée) en classe, mais elle n'offre à vrai dire que peu d'intérêt pratique si $n > 3$).

4.3 Cofacteurs : le cas non déterminé.

Le cas non déterminé est beaucoup plus délicat à analyser complètement; on se place en principe dans des sous-espaces vectoriels convenables, et le calcul est possible en extrayant des déterminants non nuls de la matrice (cofacteurs «généralisés»); mais on ne cherchera pas ici à développer cette théorie.

5 Vecteurs et valeurs propres.

5.1 Définitions.

Nous allons pour conclure utiliser le déterminant pour résoudre un important problème d'algèbre linéaire (et qui a de nombreuses applications) : la détermination de vecteurs «stables» par un endomorphisme f. En fait, on affaiblit un peu cette notion en cherchant les vecteurs $\mathbf{v}$ non nuls tels que $f(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$ (autrement dit les vecteurs colinéaires (ou liés) à leur image par f); de tels vecteurs sont dits *vecteurs propres* de f, et le nombre k est appelé *valeur propre* associée (à $\mathbf{v}$). La notion est tout à fait générale (et constitue ce qu'on appelle la théorie spectrale), mais nous ne pourrons étudier cette année que le cas de la dimension finie.

5.2 Mise en équation, polynôme caractéristique.

Si $f(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$, c'est que $(f - k\mathrm{Id}_E)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, et comme on a supposé $\mathbf{v}$ non nul, c'est que $\mathrm{Ker}(f - k\mathrm{Id}_E) \neq \{\mathbf{0}\}$, et donc que $\det(f - k\mathrm{Id}_E) = 0$.

Représentons f par sa matrice M dans une base donnée; le déterminant de la matrice $M - xI_n$ est une fonction de x, qu'on démontre aisément par récurrence être un polynôme (en x) de degré n. Un calcul élémentaire montre que ce polynôme ne dépend d'ailleurs pas du choix de la base; on dit que c'est le polynôme caractéristique de f, noté parfois $P_f(x)$. L'analyse que nous avons faite plus haut montre que s'il existe un vecteur propre (et donc non nul) de valeur propre associée k, on doit avoir $P_f(k) = 0$, et donc k doit être racine de P. On voit donc que le problème initial se résout en deux temps : on détermine d'abord les racines de P_f; puis, pour chaque valeur propre k ainsi obtenue, on cherche le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f - k\mathrm{Id}_E)$, qui est l'ensemble des vecteurs propres correspondants (et qu'on appelle le sous-espace propre associé à k).

5.3 Diagonalisation.

Supposons qu'il existe n valeurs propres distinctes (c'est assez souvent le cas, si P_f est factorisable (si on est dans $\mathbf{C}$, ou encore dans le cas de matrices symétriques, comme on le verra en Spé)). On montrera alors en exercice que chaque sous-espace propre est une droite vectorielle, et que tous les vecteurs propres forment une base de E. Dans cette base, la matrice de f est diagonale (les coefficients a_{ii} étant les valeurs propres). On dit qu'on a diagonalisé f ; la théorie du changement de base (vue au précédent chapitre) montre qu'on peut écrire $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale (et P est la matrice de passage vers la base propre). Or de nombreux calculs, inextricables sur M (puissances, «polynômes» de matrices, ...), s'avèrent assez aisés sous cette forme, comme on le verra en exercice ; on est donc amené à chercher à traiter de cette manière toute matrice (ou tout endomorphisme). Cela s'avère malheureusement impossible dans le cas général ; la théorie complète (appelée triangularisation) sera esquissée en Spé.

Exercices

1 ($\star\star$) Résoudre (et discuter en fonction du paramètre a) le système

$$\begin{cases} ax + y + z + t = a \\ x + ay + z + t = a \\ ax - y - z + t = a - 2 \\ x - ay - z - t = -a - 2 \end{cases}$$

2 ($\star\star$) Montrer que

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2$$

T 37 Soit M_n la matrice (carrée d'ordre n) $M_n = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $m_{ij} = x_i^{j-1}$, et $D_n = \det(M_n)$. Posant $X = x_n$, montrer que D_n est un polynôme (de variable X) dont on déterminera le degré, et dont les x_i (pour $1 \leq i \leq n-1$) sont les racines. En déduire une factorisation complète de D_n, puis remarquer que le coefficient du terme de plus haut degré de D_n est D_{n-1} ; en déduire l'expression de D_n sous forme d'un produit de facteurs $(x_i - x_j)$.

3 ($\star\star$) Factoriser les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & x & b & x \\ x & a & x & b \\ b & x & a & x \\ x & b & x & a \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

4 ($\star\star$) Factoriser le déterminant

$$D(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

T 38 Soit D_3 le déterminant de la matrice $M_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ Montrer à l'aide de combinaisons de lignes que D_3 est divisible par $a+b+c$ et par $a+bj+cj^2$ (où $j = e^{2i\pi/3}$). En déduire D_3, puis généraliser cette factorisation à celle de

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

5 ($\star\star\star$) Soit $A_n = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice carrée d'ordre n définie par $a_{ii} = x$ (pour tout $i \in [\![1,n]\!]$), $a_{i,i-1} = b$ et $a_{i-1,i} = c$ (pour tout $i \in [\![2,n]\!]$), et $a_{ij} = 0$ pour tous les autres couples (i,j) (matrice *tridiagonale*). Calculer par récurrence $D_n = \det(A_n)$, préciser le cas particulier $x = b+c$ (en supposant $bc \neq 0$).

6 ($\star\star$) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable; en déduire (sans calcul explicite de la matrice de passage) que $A^2 = 5A - 6I_2$.

7 ($\star\star\star$) Déterminer les valeurs propres (complexes) de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et montrer qu'elle est diagonalisable (dans $\mathbf{C}$); si f est l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, montrer que f laisse (globalement) invariant le plan vectoriel $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=0$. Déduire de la diagonalisation de f que la restriction de f à $\mathcal{P}$ n'est **pas** diagonalisable dans $\mathbf{R}$.

8 ($\star\star\star$) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant l'équation de récurrence (linéaire) $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$; on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer qu'on peut écrire $V_{n+1} = AV_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2 ne dépendant pas de n; diagonaliser A (mettant A sous la forme $A = P^{-1}DP$), et en déduire que $V_n = P^{-1}D^nPV_0$, puis la formule explicite donnant u_n en fonction de n, u_0 et u_1. On remarquera que le polynôme caractéristique de A correspond à l'équation caractéristique associée à la détermination «classique» de cette formule, vue au chapitre 12; en réfléchissant à la signification des vecteurs propres dans ce cas, montrer que ce résultat était prévisible.

20. DÉTERMINANTS

Plan

20. DÉTERMINANTS

(Formulaire)

1 Méthode du pivot.

Définition 1. 1. *On appelle* **transformation élémentaire** *d'une matrice l'une des deux opérations suivantes : l'échange de deux lignes (ou de deux colonnes), noté $L_i \leftrightarrow L_j$ (ou $C_i \leftrightarrow C_j$), et le remplacement d'une ligne par une combinaison linéaire de lignes contenant cette ligne avec coefficient* **non nul** *(ou l'opération correspondante sur les colonnes), notée $L_i \to aL_i + \sum b_j L_j$ (ou $C_i \to aC_i + \sum b_j C_j$).*

Définition 1. 2. *On dit que deux matrices sont* **équivalentes** *s'il existe une suite de transformations élémentaires transformant l'une en l'autre.*

Deux matrices équivalentes ont même rang.

Définition 1. 3. *La* **méthode du pivot** *consiste à appliquer une suite de transformations élémentaires de lignes, annulant tous les termes situés au-dessous d'un terme choisi à chaque étape, et qu'on appelle le* **pivot** *: si p_{ij} est ce terme, on utilise pour la ligne k (avec $k > i$) la transformation $L_k \to L_k - p_{kj}/p_{ij} L_i$. On obtient finalement une matrice «triangulaire», dont le rang est aisé à déterminer.*

La même méthode transforme les systèmes linéaires en systèmes triangulaires équivalents (c'est-à-dire ayant les mêmes solutions), et permet aussi de calculer la matrice inverse, en accolant à la matrice initiale une matrice unité convenable.

2 Déterminants.

Définition 2. 1. *Il existe une fonction unique f, définie pour toute famille $\mathcal{F} = \mathbf{v}_i$ de n vecteurs (de $\mathbf{K}^n$) et à valeurs dans $\mathbf{K}$, et ayant les propriétés suivantes :*

$$f(\mathcal{B}) = 1 \quad \text{(o- } \mathcal{B} \text{ est la base canonique);}$$
$$f(\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) + \lambda f(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) : \text{«multi-linéarité»;}$$
$$f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = -f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) : \text{«alternance»;}$$

on dit que f est une «forme multilinéaire alternée»; $f(\mathcal{F})$ s'appelle le **déterminant** *de la famille $\mathcal{F}$.*

Définition 2. 2. *Le* **déterminant d'une matrice** *est celui de la famille de ses vecteurs-colonnes; le* **déterminant d'un endomorphisme** *est celui de la matrice représentative de cet endomorphisme; ce dernier nombre ne dépend pas de la base choisie pour la représentation.*

On a les formules suivantes :
$\det(M) = \det({}^tM)$; $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ (o- n est l'ordre de A).

Dans une transformation élémentaire de la forme $L_i \to aL_i + \sum b_j L_j$, le déterminant est multiplié par a; dans un échange de lignes, il change de signe. On en déduit de proche en proche le détermiant par la méthode du pivot, sachant que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de la diagonale.

Définition 2. 3. *Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée. On appelle* **mineur** *(associé à a_{ij}) la matrice M_{ij} obtenue en supprimant de M la ligne i et la colonne j, et* **cofacteur** *de a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.*

On a la formule (dite de *développement suivant la ligne i*) suivante :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

On obtient en particulier $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, puis la *formule de Sarrus*

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ &= ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a'bc'' - ab''c' - a''b'c,\end{aligned}$$

Le déterminant d'une famille est non nul si et seulement si cette famille est une base; de même, $\det M = 0 \iff M$ non inversible, et (si f est un endomorphisme d'un espace de dimension n) $\det(f) \neq 0 \iff \mathrm{rg}(f) = n$. (Cette dernière formule équivaut aussi à $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}_E\} \iff \det(f) = 0$).

3 Vecteurs et valeurs propres, diagonalisation.

Définition 3. 1. *Soit f un endomorphisme de E; on appelle* **vecteur propre** *de f tout vecteur $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_E$ tel que $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Le nombre λ s'appelle la* **valeur propre** *associée à $\mathbf{v}$; l'ensemble E_λ des vecteurs tels que $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ (o- λ est une valeur propre de f) est un sous-espace vectoriel de E, non nul, appellé le* **sous-espace propre** *associé à λ.*

Si λ est valeur propre de f, c'est que $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id}_E) \neq \{\mathbf{0}_E\}$; en dimension finie, ceci équivaut à $\det(f - \lambda\mathrm{Id}_E) \neq 0$, ou encore, appelant M la matrice représentative de f dans une base de E, à $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

Définition 3. 2. *Le déterminant $\det(M - \lambda I_n)$ est un polynome de degré n en λ, qu'on appelle le* **polyn «me caractéristique** *de M (ou de f). Ses racines sont les valeurs propres de f.*

Définition 3. 3. *Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f (c'est en particulier le cas si le polyn «me caractéristique de f admet n racines distinctes). La matrice de f dans cette base est alors diagonale; on dit que f (ou M) est* **diagonalisable***; on a alors $M = PDP^{-1}$, o- P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, et D est la matrice diagonale formée des valeurs propres.*