21. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1 L'espace ordinaire.

1.1 Les préoccupations de la géométrie.

Depuis les Grecs, la géométrie est le lieu privilégié de la pensée des mathématiciens (qu'on appelait d'ailleurs des géomètres jusqu'au $18^{\text{ème}}$ siècle) ; c'est là que s'est constitué le modèle de la rigueur, là aussi que les premières subtilités des relations entre l'évidence intuitive et l'apport de la démonstration rigoureuse ont pu être appréhendées. La principale exigence du géomètre (au moins au sens classique) est non seulement de prouver ses affirmations, mais d'en donner une preuve éclairante (autrement dit d'en montrer le lien avec d'autres affirmations a priori indépendantes). Ainsi, le fait que la somme des angles d'un triangle vaille 180° était connue des Babyloniens comme un fait expérimental, alors que la (simple) preuve d'Euclide adjoint une parallèle à la figure, ce qui fait soudain «sauter aux yeux» la nécessité de ce résultat. Si les besoins concrets qui ont donné naissance à la géométrie (arpentage et astronomie pour l'essentiel) ont fait d'abord porter l'intérêt sur des questions de mesure (d'angles et de distance), les Grecs se sont intéressés à des questions plus générales (alignements, parallélisme, concourance, . . .) qu'on appelle la géométrie de position. Bien qu'une séparation complète de ces deux points de vue soit artificielle, nous allons commencer par l'étude de ces questions; nous introduirons ensuite l'outil moderne (le produit scalaire) qui permet les calculs de la géométrie métrique.

1.2 Points, droites, plans.

Les objets (idéalisés) les plus simples de l'espace ordinaire (qu'on désignera désormais par la lettre $\mathcal{E}$) sont

— les points (qui correspondent à l'image de grains de poussière sans dimension, et qui représentent plutôt des emplacements de l'espace); nous les noterons par des majuscules droites (A, B; P, P' etc. . .)

— les droites, qui idéalisent des fils fins et tendus, ou mieux encore des rayons lumineux; elles possèdent les trois propriétés de base (axiomes) suivantes : par deux points A et B (distincts) passe une droite unique (qu'on note (AB)); les droites sont illimitées et «infinies» ; toutes les droites ont les mêmes propriétés (par exemple elles sont toutes «isomorphes» à $\mathbf{R}$). On note en général les droites par des lettres (quelconques) entre parenthèses ((D), (D'), (d) . . .) ou par des lettres grecques (Δ, δ', . . .).

— les plans, qui sont les surfaces «réglées» dans toutes les directions, c'est-à-dire les surfaces $\mathcal{P}$ telles que si A et B sont deux points de P, la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{P}$. On note les plans par des majuscules cursives ($\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}'$, . . .) et on admettra (axiomes de la géométrie dans l'espace) que

  — par trois points A, B et C non alignés passe un plan unique (noté (ABC)),

  — chaque plan sépare l'espace en deux régions appelées demi-espaces, c'est-à-dire que tout «chemin» allant de l'une à l'autre rencontre le plan,

  — tous les plans ont les mêmes propriétés, celle de la géométrie plane euclidienne (ces propriétés seront supposées connues désormais; elles font en fait l'objet de ce qui fut la première construction axiomatique : le livre (attribué à Euclide) des *Eléments*, et sont fondées sur des principes «évidents», à l'exception du célèbre «postulat d'Euclide», dont on rappellera en classe l'origine et les conséquences)

À partir de ces définitions et axiomes, il est déjà possible de démontrer un grand nombre de résultats; nous verrons par exemple en classe comment montrer que l'intersection de deux plans non confondus est une droite ou est vide; et pourquoi l'axiome d'Euclide entraîne que par un point donné, il ne passe qu'un plan parallèle à un plan donné. On définit et on étudie en particulier ainsi la notion de plans parallèles (c'est-à-dire d'intersection vide); de droite parallèle à un plan; et on remarque que deux droites arbitraires de l'espace ne sont en général pas coplanaires, et donc qu'elles peuvent n'être ni concourantes, ni parallèles (on dit qu'elles se «croisent»).

Cette approche (on parle souvent de géométrie «pure») est esthétiquement la plus satisfaisante, mais l'utilisateur pressé préférera sans doute choisir la méthode la plus efficace pour résoudre un problème donné; il s'avère en effet que les résultats les plus intéressants demandent, pour être obtenus rapidement, la mise en œuvre d'autres outils, les plus simples étant l'utilisation des nombres (réels, mais on verra au chapitre 22 que les complexes peuvent aussi être mis utilement à contribution).

1.3 Nombres et mesures.

On admet (c'est un nouvel axiome) qu'étant donné deux points O et I sur une droite, tout point A de la droite peut être repéré par un réel unique a, appelé abscisse de A (et souvent noté x_A), tel que $x_O = 0$ et que $x_I = 1$; le nombre $x_B - x_A$, noté $\overline{AB}$, s'appelle la mesure algébrique de AB (dans le «repère» (O, OI)) et on voit aisément qu'il vérifie $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (relation de Chasles); l'idée derrière cette construction (due à Thalès) est que les mesures sur deux axes différents obtenues par projection (parallèle) sont proportionnelles (d'où le théorème qui porte son nom). A partir du $17^{\text{ème}}$ siècle, Descartes et ses successeurs ont eu l'idée de repérer de même tous les points du plan ou de l'espace, et de remplacer les démonstrations «géométriques» par des calculs «algébriques»; c'est ce qu'on appelle la méthode analytique, et après une certaine méfiance (due entre autre à ce qu'on maîtrisait mal la construction de $\mathbf{R}$), les géomètres ont fini par accepter la valeur des résultats ainsi obtenus.

1.4 Méthodes de démonstration.

Les règles générales qui furent données au chapitre 1 sont évidemment encore valables (et on utilise en particulier fréquemment en géométrie la méthode de séparation des cas, qui oblige à beaucoup de soin dans l'analyse des différentes possibilités; et le raisonnement par l'absurde, qui nécessite la discipline utile, mais délicate du «raisonnement juste sur des figures fausses»); on est également amené :

— à ajouter de nouvelles constructions aux objets étudiés; par exemple, le tracé ingénieux d'une parallèle permettra d'appliquer le théorème de Thalès; une coupe par un plan (ou une projection) d'une figure complexe de l'espace sera utilisée pour se ramener à un argument de géométrie plane.

— à transformer le problème étudié (par un déplacement, une homothétie...), pour faire apparaître de nouvelles relations, par exemple la transformation des hauteurs d'un triangle en médiatrices du triangle doublé (qui permet de prouver l'existence de l'orthocentre); on verra d'autres applications au chapitre 22.

— à «supposer le problème résolu» : c'est la méthode de base pour résoudre ce qu'on appelle les «problèmes de construction (ou de lieux) géométriques». Soit par exemple à tracer un carré dont les sommets sont sur trois droites données; on commencera par étudier les propriétés de la figure supposée construite (autrement dit on commence par tracer un carré et trois droites passant par les sommets); les résultats ainsi obtenus guideront vers la solution (voir le chapitre 22 pour celle-ci).

2 L'outil vectoriel.

2.1 Construction de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

On définit d'abord une relation entre couples de points, appellée *équipollence* : on dit que $(A, B) equ (C, D)$ si (A, B, D, C) est un parallélogramme (généralisé), c'est-à-dire si $(AB)//(CD)$ et si $(AC)//(BD)$ (où $(\Delta)//(\Delta')$ veut dire que les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles ou confondues). Cette relation (qui est en fait mieux définie par «les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu») est une relation d'équivalence, qui permet d'associer à chaque couple (A, B) un objet «abstrait» (sa classe d'équivalence) qu'on appelle le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (on a donc $(A, B) equ (C, D) \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$); on définit alors sur ces objets une addition (par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$) et une «multiplication externe» ; et on démontre (la seule propriété un peu difficile, $k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}$, étant une conséquence du théorème de Thalès) que l'ensemble des vecteurs ainsi construits est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, de dimension 3, et qu'on note $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. De même, l'ensemble des vecteurs correspondants aux couples de points d'un plan $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel, sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, et qu'on note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$). On montre de plus, réciproquement, qu'à tout vecteur $\mathbf{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et à tout point A de l'espace correspond un point unique B tel que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ (B s'appelle le translaté de A par $\mathbf{v}$). On a donc obtenu la possibilité d'un véritable calcul géométrique (et donc plus «naturel» que les méthodes de calcul analytique, qui sont plutôt de l'ordre d'une traduction dans un autre langage); on voit par exemple que le fait que deux plans se coupent suivant une droite devient une conséquence de la formule de la dimension (pour les sous-espaces vectoriels).

2.2 Projections et coordonnées.

Soit par exemple un plan $\mathcal{P}$, et une droite Δ non parallèle à $\mathcal{P}$ (et qui le coupe donc en un point I). Par tout point M passe une parallèle (unique) à Δ, qui coupe $\mathcal{P}$ en N. N s'appelle la projection de M sur $\mathcal{P}$, parallèlement à Δ. Or considérons l'application p qui associe au vecteur $\overrightarrow{IM}$ le vecteur $\overrightarrow{IN}$; on démontre aisément que c'est la projection vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ parallèlement à $\overrightarrow{\Delta}$ (en effet $\overrightarrow{\mathcal{P}} \oplus \overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{E}}$, les autres propriétés sont assez faciles); p est donc un projecteur, $\operatorname{Ker} p = \overrightarrow{\Delta}$ et $\operatorname{Im} p = \overrightarrow{\mathcal{P}}$, comme on l'a vu au chapitre 19. Il est alors facile de donner une interprétation géométrique des coordonnées des vecteurs dans une base; on aboutit à la notion de *repère cartésien* : soit O, A, B et C quatre points non dans un même plan, la famille $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est alors une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, on dit qu'un point M a (x, y, z) pour coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ (et donc si $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$); et on voit aisément que le point P d'abscisse x sur l'axe $(O, \overrightarrow{OA})$ (par exemple) est le projeté de M sur la droite (OA) parallèlement au plan (O, B, C). L'application qui associe à un point ses trois coordonnées (dans un repère donné) est donc une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathbf{R}^3$ (ce n'est **pas** un isomorphisme, $\mathcal{E}$ n'ayant pas été muni d'une structure algébrique); on verra d'autres exemples de telles applications au chapitre 23. Le calcul utilisant les coordonnées (la géométrie «analytique» proprement dite) sera développé au prochain paragraphe.

2.3 Barycentres.

Partant des notions physiques de centre de masse ou de charge, on appelle *barycentre* d'une famille de points $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ pondérés (affectés) des coefficients (des réels) $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ (avec la condition $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$) le point G (dont on démontre l'existence et l'unicité) tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$; une utilisation élémentaire de la formule de Chasles montre que pour tout point O, on a alors

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

d'où l'on tire la plupart des propriétés de G, par exemple le fait que le barycentre de trois points A, B et C (avec coefficients a, b et c) appartient au plan (ABC) (prendre l'origine O en A, et en déduire que $\overrightarrow{AG}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, avec pour coefficients $b/(a+b+c)$ et $c/(a+b+c)$)

La propriété la plus importante des barycentres est l' «associativité» : le barycentre G des $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ est barycentre des «barycentres partiels» de sous-familles des (A_i, α_i) (formant une partition de la famille complète), chaque «barycentre partiel» étant pondéré par la somme des coefficients des points auquel il correspond (ce qui correspond bien à l'intuition physique dont on a parlé). On en tire de nombreuses démonstrations ingénieuses de résultats délicats à obtenir autrement : position du centre de gravité d'un triangle et d'un tétraèdre, théorèmes de Céva et Ménélaüs (voir les exercices 6 et 7) ; d'autres utilisations des barycentres (telles que la formule de la médiane) seront possibles quand nous disposerons du produit scalaire.

3 Méthodes analytiques.

3.1 Principes.

On se préoccupe à présent d'obtenir des résultats géométriques par un calcul (algébrique en général). La démarche se décompose en trois étapes :

— Choix du repère et mise en équation : on essaie de déterminer un repère (non nécessairement cartésien au demeurant ; on verra d'autres systèmes de représentation (coordonnées polaires, etc...) au chapitre 23) adapté au problème, c'est-à-dire où les calculs seront aussi simples que possible; puis on y exprime les diverses données de telle façon que les éléments géométriques à déterminer soient les solutions d'équations (numériques).

— Résolution des équations : c'est en principe élémentaire, mais on verra sur divers exemples que la connaissance préalable de la nature géométrique du résultat (intersections, éléments de symétrie de la figure, ...) permet souvent de guider ou de simplifier les calculs.

— Interprétation des résultats : il faut revenir à la situation géométrique de départ, et en particulier interpréter soigneusement les cas particuliers du calcul : une impossibilité «numérique» (division par zéro, racine négative, ...) correspond souvent à une situation géométrique possible, et même souhaitée (parallélisme, seconde «solution» inattendue, mais généralisant l'énoncé, etc...).

3.2 Représentations paramétriques.

La représentation la plus directe d'un ensemble de points consiste à donner un moyen de les fabriquer un à un, à l'aide d'un ou plusieurs paramètres qu'on fera varier : on a donc affaire par exemple à une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathcal{E}$, qui aux deux paramètres t et u associe le point $M(t,u)$; on donne généralement les trois coordonnées de M (dans un certain repère) obtenant ainsi ce qu'on appelle un système d'équations paramétriques

$$(S)\begin{cases} x = f(t,u) \\ y = g(t,u) \\ z = h(t,u) \end{cases}$$

Un tel système décrit un ensemble de points $(\mathcal{S})$, dont on dit qu'il est paramètré par (S) (ou que (S) est un système d'équations paramétriques de $(\mathcal{S})$). En pratique, si les fonctions utilisées sont assez régulières, $(\mathcal{S})$ est une «courbe» si il y a un seul paramètre, et une «surface» s'il y en a deux. Ces résultats seront repris au chapitre 23, et développés en Spé.

En particulier, une réflexion vectorielle permet d'obtenir assez aisément les représentations suivantes : une droite passant par $A\colon(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur directeur $\vec{v} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ est représentée par le système

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}$$

et un plan $\mathcal{P}$ passant par $A\colon(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{v} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ et $\vec{v'} = \alpha'\vec{\imath} + \beta'\vec{\jmath} + \gamma'\vec{k}$ (c'est-à-dire que $\vec{v}$ et $\vec{v'}$, non colinéaires, sont contenus dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ associé à $\mathcal{P}$) sera représenté par

$$\begin{cases} x = \alpha t + \alpha' u + x_A \\ y = \beta t + \beta' u + y_A \\ z = \gamma t + \gamma' u + z_A \end{cases}$$

Il convient d'être tout particulièrement attentif au fait qu'une telle représentation n'est valable que pour un seul objet ; ainsi l'intersection des deux plans donnés par les systèmes

$$(S)\begin{cases} x = t + 2u + 3 \\ y = t - u + 2 \\ z = -2t + 3u + 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S')\begin{cases} x = 3t - u + 4 \\ y = -3t - 2u + 1 \\ z = -t + u \end{cases}$$

amène en fait à résoudre le système à **quatre** inconnues

$$\begin{cases} x = t + 2u + 3 = 3t' - u' + 4 \\ y = t - u + 2 = -3t' - 2u' + 1 \\ z = -2t + 3u + 1 = -t' + u' \end{cases}$$

obtenant une infinité de solutions (une droite), comme on le verra en classe.

3.3 Équations cartésiennes.

On peut parfois obtenir une relation caractéristique entre les coordonnées des points d'un ensemble donné ; on dit alors que cette relation est l'équation cartésienne de l'ensemble. Ainsi, on peut démontrer (à l'aide du déterminant 3×3) que les points d'un plan donné satisfont à une relation de la forme $ax + by + cz + d = 0$. On verra aux prochains paragraphes que ce type d'écriture est surtout intéressant en relation avec des questions d'angles et de distances (dans l'exemple précédent, le vecteur (a, b, c)

joue un rôle essentiel si le repère est orthonormal) ; il convient surtout de retenir que les droites de l'espace **n'ont pas** de telles équations (ou plus précisémment que des formes éventuelles sont artificielles ($x^2+(z-y)^2=0$) ou peu maniables (système de deux équations)). En particulier, on se méfiera d'équations telles que $2y+3z=1$: dans le plan $(O,\vec{\jmath},\overrightarrow{k})$, cette équation représente bien une droite δ (celle passant par les points $(0,-1,1)$ et $(0,2,-1)$), mais cette équation est en fait celle d'un plan $\mathcal{P}$ (contenant cette droite, et parallèle à $(O,\vec{\imath})$, comme on le voit aisément en remarquant que si $A(0,y_A,z_A)\in\delta$, on aura $M(a,y_A,z_A)\in\mathcal{P}$).

4 Produit scalaire.

4.1 Introduction.

Comme on l'a dit aux paragraphes précédents, la géométrie (pratique) s'est constituée autour de questions de mesures (d'angles et de distance) ; l'importance pratique des relations métriques et l'importance théorique du théorème de Pythagore ayant été reconnues très tôt. Mais ce n'est qu'au 19$^{\text{ème}}$ siècle que le rôle central joué par le produit scalaire est apparu, et qu'on s'est rendu compte qu'on pouvait bâtir sur lui toute la géométrie (en même temps qu'on découvrait la possibilité de «géométriser» ainsi des espaces vectoriels arbitraires, comme on le verra en Spé). C'est donc par une définition «axiomatique» du produit scalaire que nous allons commencer, avant de l'utiliser pour obtenir des définitions des distances et des angles ; l'approche inverse (partant d'une notion «intuitive» de distances et d'angles) et utilisant la «formule» $\mathbf{u}.\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})$ s'avère plus difficile à rendre rigoureuse. Bien entendu, en pratique (dans l'espace ordinaire), on ne se préoccupe pas de l'ordre dans lequel ces notions ont été introduites, et on choisit les formules les plus appropriées.

4.2 Définitions.

On s'intéresse à des applications f de $\overrightarrow{\mathcal{E}}\times\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\mathbf{R}$ ayant les propriétés suivantes : $f(\mathbf{u},\mathbf{v})=f(\mathbf{v},\mathbf{u})$ (symétrie) ; $f(\mathbf{u},\mathbf{u})\geq 0$ et $f(\mathbf{u},\mathbf{u})=0 \iff \mathbf{u}=\mathbf{0}$ (on dit que f est définie positive) et telles que $\mathbf{u}\mapsto f(\mathbf{u},\mathbf{v})$ (pour $\mathbf{v}$ fixé) soit une forme linéaire (on dit alors que f est une *forme bilinéaire (symétrique) définie positive*; on remarquera une analogie (partielle) avec la définition des déterminants).

De telles applications existent (et leur théorie générale, dite théorie des *espaces euclidiens*, sera faite en Spé). Admettons qu'on puisse trouver trois vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ tels que $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=0$ si $i\neq j$ et que $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)=1$ (on montrera en Spé que c'est toujours possible) ; on dira alors que $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ (dont on montrera en exercice que c'est une famille libre) forme une *base orthonormale* de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Avec la définition «intuitive» du produit scalaire que nous verrons tout à l'heure, nous venons d'obtenir un repère orthonormal de l'espace ordinaire, c'est-à-dire trois axes orthogonaux deux à deux, et une unité (de longueur 1) sur chacun.

Un calcul élémentaire, qui sera fait en classe, montre alors que pour deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de coordonnées respectives (x,y,z) et (x',y',z') (dans la base $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$), on doit avoir $f(\mathbf{u},\mathbf{v})=xx'+yy'+zz'$; c'est ce nombre (réel) qui sera appelé le *produit scalaire* de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, et noté $\mathbf{u}.\mathbf{v}$; on note souvent aussi $\mathbf{u}.\mathbf{u}=\mathbf{u}^2$ (*carré scalaire* de $\mathbf{u}$).

Les propriétés (admises) de f deviennent alors, avec ces notations :

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$$
$$\mathbf{u}.(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}.\mathbf{v}+\mathbf{u}.\mathbf{w} \qquad \text{(d'où le nom de } \textbf{produit} \text{ scalaire)}$$
$$\mathbf{u}.(\lambda\mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}).\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}.\mathbf{v})$$
$$\mathbf{u}^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^2 = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Le nombre $\sqrt{\mathbf{u}^2}$ s'appelle la norme de $\mathbf{u}$, et se note $\|\mathbf{u}\|$; on vérifiera en exercice qu'il a certaines propriétés de la valeur absolue, telles que $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$, ou l' «inégalité triangulaire» $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

4.3 Conséquences élémentaires.

On peut «calculer» avec le produit scalaire par «distributivité», ainsi on a les identités remarquables $(\mathbf{u}+\mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2+2\mathbf{u}.\mathbf{v}$ et $(\mathbf{u}+\mathbf{v}).(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}^2-\mathbf{v}^2$; ou encore $(\lambda\mathbf{u})^2 = \lambda^2\mathbf{u}^2$.

On en déduit une méthode (orthogonalisation), qu'on verra en exercice, permettant de construire les repères orthonormaux dont on a parlé ; en particulier, pour obtenir un vecteur colinéaire à $\mathbf{v}$ et de norme 1, il suffit de prendre $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$.

4.4 Mesure des angles.

Soit $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ deux vecteurs unitaires, c'est-à-dire de norme 1. On dit qu'ils forment un angle (non orienté) de mesure $\mathrm{Acos}\,(\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2)$ (on démontrera en Spé que le nombre $(\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2)$ est en effet compris entre -1 et 1 (théorème de Cauchy-Schwartz)) ; l'angle lui-même est un objet plus abstrait, dont on ne cherchera pas cette année à donner une définition rigoureuse.

En particulier, deux vecteurs (unitaires) formant un angle de $\pi/2$ sont dit orthogonaux, et plus généralement, on dit que deux vecteurs dont le produit scalaire est nul sont orthogonaux.

Un calcul élémentaire montre que dans le plan, si on part d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormal, le vecteur $\cos\alpha\vec{\imath}+\sin\alpha\vec{\jmath}$ est unitaire, et forme avec $\vec{\imath}$ un angle de mesure α (ou $-\alpha$; on verra plus loin comment orienter dans ce cas).

Dans le cas général, l' «angle» de deux vecteurs (ou plus rigoureusement la mesure de cet angle) sera obtenu en prenant des vecteurs unitaires colinéaires avec eux, et de même sens ; on en déduit la formule (qui comme on l'a dit pourrait aussi servir de définition)

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\left(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}\right)$$

5 Orthogonalité et distances.

5.1 Définitions.

Revenant à l'espace ordinaire, on dit d'abord que deux droites (D) et (D') sont orthogonales (ce que l'on note $(D) \perp (D')$) quand leurs vecteurs directeurs le sont (et on réserve le terme de *perpendiculaires* à des droites orthogonales **sécantes** (et donc coplanaires)). On dit ensuite qu'une droite est orthogonale à un plan (ce qu'on note encore $(D) \perp \mathcal{P}$) si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan. On démontre (facilement, par calcul du produit scalaire) qu'il est suffisant qu'elle le soit à deux droites non parallèles de ce plan ; et (plus difficilement) qu'il existe une direction unique orthogonale à un plan donné (on dit encore que c'est la direction *normale* au plan) ; de même, il existe une direction unique de plan (c'est-à-dire un seul plan vectoriel) orthogonale à une droite donnée. Les projections parallèlement à ces directions sont appelées *projections orthogonales* sur le plan (ou sur la droite).

Il est possible de n'utiliser que ces définitions pour démontrer des résultats de géométrie «pure» (par exemple on verra en classe le «théorème des trois perpendiculaires»), mais il est généralement plus simple de passer par des méthodes vectorielles (ainsi, on démontre l'existence de l'orthocentre (d'un triangle) en utilisant l'identité $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0$), ou analytiques, comme on va le voir.

5.2 Équations cartésiennes, vecteurs normaux.

On se place désormais dans un repère orthonormal. Cherchons l'ensemble des points M (de coordonnées (x, y, z)) tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à un vecteur $\mathbf{u} = (a, b, c)$ (où A et $\mathbf{u}$ sont fixés). On obtient l'équation cartésienne : $ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A) = 0$, dont on sait qu'elle représente un plan. On voit donc que tout plan $\mathcal{P}$ d'équation $[\![ax+by+cz+d = 0]\!]$ est orthogonal à la direction de vecteur (a, b, c) ; on dit que les vecteurs ayant cette direction (donc de la forme (ka, kb, kc)) sont des vecteurs normaux au plan $\mathcal{P}$; et on voit qu'il est aisé de déterminer les coordonnées de la projection orthogonale M_0 du point $M = (x_M, y_M, z_M)$ sur le plan $\mathcal{P}$ en écrivant que le point $M_0 = (x_M + ka, y_M + kb, z_M + kc)$ doit appartenir à $\mathcal{P}$, ce qui (en remplaçant les coordonnées de M_0 dans l'équation $[\![ax + by + cz + d = 0]\!]$) détermine k.

De même, dans un plan, la droite (D) d'équation $[\![ax + by + c = 0]\!]$ est orthogonale au vecteur (a, b) ; et comme ce dernier est orthogonal au vecteur $(-b, a)$ (puisque $-ba + ab = 0$), on en déduit que $(-b, a)$ est un vecteur directeur de (D). Dans ce dernier cas, une forme particulière intéressante consiste à *normaliser* ces vecteurs en prenant les vecteurs unitaires correspondants (par exemple $(a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2})$) et on voit alors qu'on peut écrire l'équation de (D) sous la forme $x \cos \alpha + y \sin \alpha + d = 0$ (où α est la mesure de l'angle de (D) avec (Ox) et $|d|$ la distance de O à (D), comme on le verra plus bas).

5.3 Mesure des distances.

La distance de deux points AB peut être définie comme la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$; on en déduit la formule

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

qui est la version moderne (et à trois dimensions) du théorème de Pythagore. (La version classique, sur l'hypoténuse des triangles rectangles, est un cas particulier des relations métriques que nous verrons plus bas). On définit la distance d'un point A à un ensemble $\mathcal{S}$ comme la plus petite distance de ce point à tous les points de $\mathcal{S}$: $d(A, \mathcal{S}) = \inf_{P \in \mathcal{S}} AP$, et on verra en Spé des conditions d'existence et des généralisations. On montre assez facilement que le point d'un plan (ou d'une droite) «le plus proche» de A doit être la projection orthogonale de A sur ce plan (ou sur cette droite) ; comme on a vu comment déterminer analytiquement les équations de ces projections, on pourrait obtenir ainsi les coordonnées du projeté, puis la distance. Mais il existe dans chaque cas une méthode plus astucieuse, et on verra en classe comment démontrer les formules suivantes : si (D) a pour équation $[\![ax + by + c = 0]\!]$, la distance de M: (x_M, y_M) à (D) est donnée par

$$d(M, (D)) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

et de même, si $\mathcal{P}$ a pour équation $[ax+by+cz+d=0]$,

$$d(M,(D)) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Enfin, si une droite de l'espace Δ (passant par A et de vecteur directeur $\mathbf{u}$) est donnée par des équations paramétriques (de la forme $M(t)=(x(t),y(t),z(t))$), il s'avère plus commode de chercher le minimum de la fonction $f(t) = \big(d(M,M(t))\big)^2 = (x_M - x(t))^2+(y_M-y(t))^2+(z_M-z(t))^2$; ou encore, utilisant le produit vectoriel (voir plus loin), de remarquer, ce qui sera montré en classe, que

$$d(M,\Delta) = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Une généralisation supplémentaire amène à la notion de distance de deux droites de l'espace; elle sera traitée en exercice (l'idée est cette fois de chercher une droite perpendiculaire aux deux droites (leur «perpendiculaire commune»), pour obtenir le plus petit segment entre les deux droites).

5.4 Applications.

On obtient les équations cartésiennes des cercles du plan $((x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2)$ et des sphères de l'espace $((x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=R^2)$ en écrivant que la distance MC doit être égale à R; on a vu au chapitre 3 comment utiliser la mise sous forme canonique pour montrer par exemple que réciproquement, une équation de la forme $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ définit une sphère (si $a^2+b^2+c^2>4d$).

En mettant sous forme analytique $AM=BM$, on obtient l'équation d'un plan, formé de tous les points équidistants de A et B : le plan médiateur de $[AB]$. Plus généralement, de nombreux problèmes classiques sont aisés à mettre en équation de cette manière; par exemple, on verra dans l'exercice-type n° 39 comment résoudre ainsi le problème de Leibnitz : trouver l'ensemble des M tels que $\sum a_i MA_i^2 = \mathrm{C^{te}}$ (ainsi que sa solution utilisant le barycentre), l'exercice 18 s'intéresse à la recherche des plans bissecteurs, et on trouvera la mise en équation des définitions «métriques» des coniques au chapitre 23.

6 Produit vectoriel et produit mixte.

6.1 Calculs de déterminants.

Soit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois vecteurs de coordonnées respectives (x,y,z), (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2). En développant suivant la première colonne le déterminant de la famille $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$, on obtient $x(y_1z_2-y_2z_1)-y(x_1z_2-x_2z_1)+z(x_1y_2-x_2y_1)$; ce déterminant est donc égal au produit scalaire du vecteur $\mathbf{u}$ par un vecteur $\mathbf{u}'$ de coordonnées $(y_1z_2-y_2z_1, x_2z_1-x_1z_2, x_1y_2-x_2y_1)$; on voit que ce dernier vecteur est orthogonal au plan (vectoriel) engendré par $(\mathbf{v},\mathbf{w})$, puisque la condition d'appartenance à ce plan est $\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=0$, ce qui est équivalent à $\mathbf{u}.\mathbf{u}'=\mathbf{0}$, donc à $\mathbf{u}\perp\mathbf{u}'$.

Calculons à présent le déterminant de la famille $(\mathbf{u}',\mathbf{v},\mathbf{w})$. On vient de voir qu'on doit trouver $\mathbf{u}'.\mathbf{u}'=\mathbf{u}'^2=\|\mathbf{u}'\|^2$; les considérations «géométriques» qui ont été faites (au chapitre 20) sur le déterminant (égal au «volume» du parallélépipède construit sur les trois vecteurs) montrent qu'on doit avoir $\det(\mathbf{u}',\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathcal{A}\|\mathbf{u}'\|$, où $\mathcal{A}$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$. On en déduit que $\mathbf{u}'$ est un vecteur normal au plan $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, et de norme $\mathcal{A}$. Pour obtenir la valeur de $\|\mathbf{u}'\|$ sans utiliser cet argument, on va déterminer $\|\mathbf{u}'\|^2 + (\mathbf{v}.\mathbf{w})^2$ (bien sûr, on se doute du résultat et on a choisi cette formule pour éliminer les termes en $\cos\alpha$). On obtient, après un calcul direct (et fastidieux)

$$(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_2z_1 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 = \ldots$$
$$\ldots = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2),$$

c'est-à-dire $\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2$. Remarquant alors que $(\mathbf{v}.\mathbf{w})^2 = \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2\cos^2\alpha$, où α est la mesure de l'angle $(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}})$, on voit qu'on doit avoir $\mathcal{A} = \|\mathbf{u}'\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\||\sin\alpha|$.

6.2 Définition du produit vectoriel.

Les calculs précédents conduiraient à introduire un vecteur noté $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, défini par les formules de coordonnées qu'on a donné. Mais il s'avère que cette définition n'est pas assez précise, ou plutôt qu'elle dépend encore du repère. Il existe en effet deux sortes de repères orthonormaux (voir plus bas), et la «formule» donne des résultats opposés selon qu'on est en repère direct («trois doigts de la main droite») ou inverse. Dans une présentation moderne (et axiomatique), on introduirait arbitrairement une des deux versions, et on définirait la notion de repère direct comme repère donnant le «bon» résultat. De toute façon, il ne nous sera possible de justifier clairement tout cela que lorsque nous aurons étudié (au prochain chapitre) les déplacements et les changements de repère.

Il est plus facile de donner du produit vectoriel $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ une définition géométrique (mais on la trouvera arbitraire si on ne se reporte pas aux calculs qui viennent d'être faits) : c'est le vecteur $\mathbf{x}$ normal au plan $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, de norme $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\sin(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}})$ et d'orientation telle que $\det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x})$ soit positif (ou encore : de «même» orientation (règle des trois doigts) que le repère de référence).

6.3 Conséquences et applications.

La définition à partir du déterminant (on dit souvent que le produit vectoriel est un déterminant «incomplet») permet d'obtenir aisément les résultats suivants :

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \qquad \text{(bilinéarité)}$$
$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \qquad \text{(antisymétrie)}$$
$$\mathbf{u}.(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad \text{(produit mixte)}$$

On remarquera l'analogie avec la définition «axiomatique» donnée du produit scalaire; il serait d'ailleurs possible, comme pour le déterminant, de partir de cette série de propriétés pour obtenir une définition «abstraite» ; mais il s'avère que le résultat ainsi obtenu (la théorie des «tenseurs») est trop délicat d'emploi par rapport à son intérêt à notre niveau. De l'antisymétrie et de la linéarité, on obtient aisément la condition caractéristique de colinéarité : $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ liée $\iff \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. D'autres formules plus complexes peuvent être obtenues par des arguments géométriques sur des projections bien choisies, utilisant la définition «en $\sin\alpha$» ; par exemple, la formule du «double produit vectoriel» :

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u}.\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{w}$$

Le produit vectoriel est l'outil naturel pour construire des directions normales; comme tel, il intervient surtout dans des situations où on «tourne» autour d'un axe, comme on l'a vu en Mécanique. En particulier, on peut représenter l'ensemble des vitesses de rotation par une formule du type $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Gamma}$ (où $\overrightarrow{\Gamma}$ est porté par l'axe de rotation) ; et représenter de même les moments cinétiques, ce qui permet des calculs simplifiés de combinaisons de rotations suivant des axes distincts.

Si on reste dans un plan, les produits vectoriels $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ sont tous dans la direction orthogonale à ce plan, et de norme égale à $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ (calculé par rapport à un repère orthonormé du plan) ; on voit que cela doit vouloir dire que $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\sin(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})|$ doit être l'aire du parallélogramme construit sur $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, comme cela a été dit plus haut.

6.4 Orientation du plan et de l'espace.

Partons d'un repère (ou d'une base) (orthonormal) donné, que l'on dira bien orienté (ou *direct*, ou positif) ; un tel choix est nécessairement arbitraire, au point qu'il n'est pas possible, par exemple, d'expliquer le choix qu'on a fait sans le dessiner, ou se référer à des objets physiques (tire-bouchons ou autres). Une fois un tel choix fait, on dira qu'une autre base est également directe si son déterminant (dans la première) est positif. On verra dans l'interlude que la matrice correspondante est orthogonale ; son déterminant vaut donc 1 ou -1 ; les repères correspondants à un déterminant négatif sont dit *inverses*. C'est en fait à de tels repères que s'appliquent les formules du produit vectoriel qu'on a vu, ce qui veut dire, par définition, que si $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$, et que si $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$, la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ est orthonormale et directe.

Dans le cas du plan, en adoptant la convention selon laquelle on «regarde» le plan de dessus, la règle «du sens inverse des aiguilles d'une montre» définit le sens positif. Mais il suffit de passer de l'autre côté du plan (ou de retourner le calque) pour comprendre qu'en tant qu'objet plongé dans l'espace, on ne peut pas orienter le plan ; c'est la raison pour laquelle le concept d'angle négatif n'a de sens que dans un plan donné.

Inversement, si on fixe une orientation d'un plan donné (c'est-à-dire un couple $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de vecteurs unitaires orthogonaux de ce plan, on peut exploiter le produit vectoriel pour déterminer si un repère est direct ou non, et plus généralement pour déterminer le signe d'un angle ; en effet, la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ est directe par définition, et si $\mathbf{w} = (x, y)$ et $\mathbf{w}' = (x', y')$ sont deux vecteurs du plan (dans la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$), on aura $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}' = (xy' - yx')\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. On a vu que $\|\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}'\| = |\sin(\widehat{\mathbf{w}, \mathbf{w}'})|$, on en déduit donc que $xy' - yx' = \pm\sin(\widehat{\mathbf{w}, \mathbf{w}'})$; et c'est arbitrairement (mais pour obtenir une convention cohérente) qu'on choisit de prendre $\mathrm{Arc}\sin(xy' - yx')$ comme mesure de l'angle (orienté) $(\widehat{\mathbf{w}, \mathbf{w}'})$.

6.5 Mesure des aires et des volumes.

Sans rentrer dans une théorie complète, qui sera faite en Spé, la mesure d'aires et de volumes consiste essentiellement à les approcher par des sommes d'objets élémentaires très petits, en faisant tendre l'erreur commise vers 0. Si ces calculs relèvent du calcul intégral, il faut pour pouvoir commencer avoir défini des aires et des volumes «élémentaires» ; on convient d'attribuer l'aire (respectivement le volume) 1 au carré (au cube) construit sur le repère (direct) choisi ; et on démontre alors, avec quelques hypothèses minimales, que l'aire (le volume) du parallélogramme (du parallélépipède) construit sur une base est égale à la valeur absolue du déterminant de cette base ; ce qui conduit à généraliser à des notions d'aires et de volumes algébriques, en prenant la valeur du déterminant, même quand elle est négative. Des applications importantes de cette idée seront vues en Spé.

Il est d'autre part utile de connaître les aires et les volumes de quelques figures simples ; on retrouvera en classe les formules usuelles : aire d'un trapèze $= (B + b)/2h$; aire du disque $= \pi R^2$; volume d'une pyramide $=$ (aire de la base $\times$ hauteur) $/3$; volume de la sphère $= \frac{4}{3}\pi R^3 \ldots$

7 Trigonométrie plane et sphérique.

7.1 Angles orientés, angles de droites.

On vient de voir qu'il n'est pas possible d'orienter les angles dans l'espace ; dans un plan, on définit l'angle (orienté) de deux vecteurs (à 2π près) par l'une des formules qu'on a vu (et dont on verra au prochain chapitre qu'elles ne dépendent pas non plus des déplacements du plan) ; si on essaie de définir l'angle de deux droites par celui de leurs vecteurs directeurs, on découvre que selon le sens de ceux-ci, l'angle ne peut être défini qu'à π près. On posera donc (à π près) $(\widehat{(AB),(CD)}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$. On démontrera alors en classe (en commençant par la relation analogue sur les angles de vecteurs) que les angles (orientés) satisfont (à π près) à la relation de Chasles

$$(\widehat{\Delta,\Delta'}) + (\widehat{\Delta',\Delta''}) = (\widehat{\Delta,\Delta''}) + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

On remarquera qu'on n'a pas essayé de donner une définition de l'objet «angle» (des secteurs angulaires, par exemple) ; cela s'avère surprenamment difficile pour une utilité pratique faible. Dans l'espace, un concept plus «concret» (l'angle solide) sera défini en Spé, mais ces idées (relevant du calcul intégral vectoriel) n'ont en fait que peu de rapport avec ce que nous essayons de faire ici, c'est-à-dire de mesurer des orientations (et donc des rotations, comme on le verra dans le prochain chapitre).

7.2 Relations métriques dans les triangles.

On convient traditionnellement de noter a, b, et c les longueurs BC, AC et AB des trois côtés d'un triangle ABC, $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les trois angles (on prend les mesures positives de l'intervalle $]0,\pi[$) ; on voit alors aisément que $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$, donc en développant :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

En particulier, $\hat{A} = \pi/2 \iff a^2 = b^2 + c^2$ (Pythagore).

Utilisons à présent le produit vectoriel ; l'aire S du triangle étant la moitié de celle du parallélogramme construit sur AB et AC par exemple, on a $S = (bc\sin\hat{A})/2$; on en déduit que

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

Ces deux séries de relations permettent de «construire» des triangles en connaissant certains angles et côtés (c'était le sens initial du mot trigonométrie) ; d'autres relations n'ont plus qu'un intérêt de curiosité, par exemple (en posant $p = (a+b+c)/2$) l'étrange formule (due à Héron d'Alexandrie) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

7.3 Projections des angles de l'espace.

La mesure des angles dans l'espace ne présente pas plus de difficultés, mais on a aussi défini l'angle d'une droite et d'un plan (celui (inférieur à $\pi/2$) formé par la droite et sa projection orthogonale sur le plan) et l'angle de deux plans (celui obtenu par intersection des deux plans avec un plan orthogonal à leur intersection). On voit qu'alors deux plans sont orthogonaux si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre ; et on est amené à chercher par exemple comment se comporte un angle «oblique» quand on le projette sur un plan. On verra en classe comment mettre ce type de problème en équation, et on démontrera par exemple que l'angle d'une droite et d'un plan est le plus petit de tous les angles formés par cette droite et une droite quelconque du plan.

7.4 Trigonométrie sphérique.

Comme on l'a dit au chapitre précédent, ce sont des préoccupations astronomiques qui ont amené aux premières découvertes géométriques, et en particulier aux relations, connues des Babyloniens, entre les trois angles d'un trièdre (de trois demi-droites de l'espace issues d'un même sommet) et les angles formés par les plans de ce trièdre. En coupant la figure par une sphère, on aboutit à un «triangle sphérique» et à des relations entre ses «angles» et ses «côtés», qu'on établira en classe par projection et utilisation du produit scalaire : en appelant $\hat{A}$ l'angle des deux plans (δ, δ') et (δ, δ''), et en posant $\alpha = \widehat{(\delta, \delta')}$, $\beta = \widehat{(\delta, \delta'')}$ et $\gamma = \widehat{(\delta', \delta'')}$, on obtient par exemple (avec des conventions de signe convenables) la «formule fondamentale de la trigonométrie sphérique» :

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\hat{A}$$

Exercices

1 Calculs vectoriels, barycentres.

1 ($\star$) Soit trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ tels que $\delta = \mathcal{P}\cap\mathcal{Q}$, $\delta' = \mathcal{P}\cap\mathcal{R}$ et $\delta'' = \mathcal{Q}\cap\mathcal{R}$ soient des droites. Montrer (en utilisant les plans vectoriels associés) que si δ et δ' sont parallèles (et non confondues), il en est de même de δ''.

2 ($\star$) Soit A, B, C trois points non alignés, G_t le barycentre de ces trois points avec coefficients respectifs t, $t+1$ et $-2t$. Pour quelle valeur de t la droite CG_t est-elle parallèle à AB ? Quel est l'ensemble décrit par G_t quand t varie ?

3 ($\star\star$) Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires. Monter que les milieux de AB, BC, CD et AD (notés respectivement M, N, P et Q) forment un parallélogramme, dont les diagonales (MP et NQ) se coupent au milieu du segment RS, avec R milieu de AC et S milieu de BD.

4 ($\star\star$) Soit A, B et C trois points non alignés, et G leur barycentre avec coefficients a, b et c (on suppose que $b+c \neq 0$). Soit P l'intersection des droites (AG) et (BC) (on montrera qu'elles ne sont pas parallèles), calculer $\overline{PB}/\overline{PC}$.

5 ($\star\star\star$) Déduire de l'exercice précédent le théorème de Céva : A, B et C étant trois points non alignés, soit $P \in (BC)$, $Q \in (AC)$ et $R \in (AB)$; les trois droites (AP), (BQ) et (CR) sont alors concourantes si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$

6 ($\star\star\star$) Utilisant les mêmes idées que dans les deux exercices précédents, montrer le théorème de Ménélaus : A, B et C étant trois points non alignés, soit $P \in (BC)$, $Q \in (AC)$ et $R \in (AB)$; les trois points P, Q et R sont alors alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = +1.$$

(on pourra, par exemple, considérer P comme barycentre de Q et R, et appliquer le théorème de composition).

2 Équations de droites et de plans.

7 (R) Que représente l'équation cartésienne $[y = b]$ dans l'espace rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k})$? Et que représente $[(x-a)^2 + (z-c)^2 = 0]$?

8 ($\star\star$) Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$ (on suppose que $abc \neq 0$) et l'intersection de ce plan avec la droite $(O, \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \overrightarrow{k})$.

T 38 Soit $(\mathcal{P}_t)_{t \in \mathbf{R}}$ la famille de plans définis (dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$) par les équations cartésiennes : $M(x, y, z) \in \mathcal{P}_t \iff (t+1)x + (1-t)y + (2t-1)z = 1 + 3t$. Montrer que tous les plans de la famille ont une droite Δ en commun. Réciproquement, tous les plans contenant Δ appartiennent-ils à la famille ?

9 ($\star\star$) Étant donné un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k})$, soit D_t la droite passant par $A(1, 1, t)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + t\vec{k}$. Pour quelle valeur de t cette droite est-elle parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y + 3z = 1$? Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D_t et de $\mathcal{P}$ pour les autres valeurs de t ; quel est l'ensemble parcouru par ce point quand t varie ? (on pensera à utiliser un barycentre).

3 Produit scalaire, calculs de distances et d'angles.

10 ($\star$) Soit ABC un triangle équilatéral de côtés 1 ; déterminer la formule du produit scalaire dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (c'est-à-dire la valeur de $\mathbf{u}.\mathbf{v} = (x, y).(x', y')$ pour des vecteurs donnés par leurs coordonnées dans cette base) ; contrôler qu'on a bien $BC = \|(-1, 1)\| = 1$.

11 ($\star\star\star$) Déterminer a (positif) pour que (dans un repère orthonormé) les points $A : (a, 1, 0)$, $B : (a, -1, 0)$ et $C : (1, 0, a)$ forment un triangle équilatéral. Pour cette valeur de a, on considère les 12 points de coordonnées $(\pm a, \pm 1, 0)$, $(0, \pm a, \pm 1,)$ et $(\pm 1, 0, \pm a)$. Montrer que la figure formée par ces points (en les reliant aux points les plus proches) est un polyèdre régulier, c'est-à-dire formée de faces égales (combien y en a-t-il?) et qui sont des polygônes réguliers ; quel est l'angle de deux faces adjacentes ?

T 39 Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de points de l'espace, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de réels tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, et k une constante. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de l'espace tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2 = k$ par une méthode analytique, puis en faisant intervenir le barycentre des points A_i (avec coefficients a_i). Que se passe-t-il si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$?

12 ($\star$) Montrer que si AM est médiane du triangle ABC, $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + BC^2/4$ (identité «de la médiane»).

13 ($\star\star$) Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan $\mathcal{P}$, P un point (fixé) de $\mathcal{P}$; pour toute droite Δ passant par P et sécante à $\mathcal{C}$, on appelle A et B les deux points d'intersection de Δ et $\mathcal{C}$;

montrer que $p = \overline{PA}.\overline{PB}$ ne dépend pas de Δ; que se passe-t-il si Δ est tangente au cercle ?

14 ($\star\star\star$) Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux plans non parallèles d'équations respectives $[ax + by + cz + d = 0]$ et $[a'x + b'y + c'z + d' = 0]$. À l'aide des formules de distance, et en remarquant que $|A| = |B| \iff A = \pm B$, montrer que l'ensemble des points M tels que $d(M, \mathcal{P}) = d(M, \mathcal{Q})$ est la réunion de deux plans orthogonaux entre eux. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

15 ($\star\star\star$) Déterminer, dans un repère orthonormé bien choisi, l'équation de l'ensemble des points M de l'espace tels que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha$, où A et B sont deux points fixés, et α un angle fixé. Montrer (géométriquement, ou en utilisant au besoin un logiciel tel que Maple) que l'intersection de cet ensemble et d'un plan quelconque contenant A et B est réunion de deux arcs de cercles.

T 40 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on appelle (D) la droite $(O, \vec{\imath})$, et Δ la droite passant par $A : (0, 1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ (avec $b^2 + c^2 \neq 0$). Déterminer la distance de D à Δ :

a) en étudiant la distance d'un point quelconque de Δ à (D);

b) par une construction «géométrique» de la perpendiculaire commune.

16 ($\star\star$) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on appelle Δ la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{d} = a\vec{\jmath} + b\vec{k}$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points P équidistants de Δ et du plan $\mathcal{P} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$; en déduire que $\mathcal{C}$ est réunion de droites passant par l'origine (on dit que $\mathcal{C}$ est un cône de sommet O). Pourquoi ce résultat était-il géométriquement prévisible ?

4 Produit vectoriel.

T 41 Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux plans sécants non orthogonaux; montrer, à l'aide d'une mise en équation dans un repère bien choisi, que l'angle d'une droite D de $\mathcal{Q}$ et de sa projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ est maximal lorsque $D \perp (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$.

17 ($\star\star$) Justifier géométriquement que l'on puisse écrire $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$. Par un calcul direct dans un repère convenablement choisi, montrer la «formule du double produit vectoriel» $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u}.\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{w}$.

18 ($\star\star$) Soit P et Q les plans d'équations cartésiennes respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, avec les vecteurs $\mathbf{n} = (a, b, c)$ et $\mathbf{n}' = (a', b', c')$ non colinéaires. Montrer qu'on peut écrire l'intersection des deux plans sous la forme paramétrique (t paramètre)

$$\mathbf{v} = t\,\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}' + \frac{(d'\,\mathbf{n} - d\,\mathbf{n}') \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}')}{\|\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}'\|^2},$$

où $\mathbf{v} = (x, y, z)$ est le vecteur des coordonnées d'un point arbitraire de $P \cap Q$ (dépendant de t).

21. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Plan

21. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

(Formulaire)

1 L'espace «ordinaire», et l'espace vectoriel associé.

On montre qu'il est possible d'associer à tout couple (A, B) de points de l'espace «ordinaire» $\mathcal{E}$ un vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, noté $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, de telle sorte que :

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff AC$ et BD ont même milieu

(on dit que (A, B) et (C, D) sont **équipollents**)

(2) (Chasles) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(3) $\forall A \in \mathcal{E},\ \forall \mathbf{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},\ \exists! B \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$

(on dit que B est déduit de A par **translation** de vecteur $\mathbf{v}$)

Définition 1. 1. *On dit que $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ est une* **droite** *de $\mathcal{E}$ s'il existe une droite vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (notée $\overrightarrow{\mathcal{D}}$), et un point A de $\mathcal{D}$, tels que $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{E} \mathbin{/} \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}\}$. De même, $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ est un* **plan** *de $\mathcal{E}$ s'il existe un plan vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (noté $\overrightarrow{\mathcal{P}}$), et un point A de $\mathcal{P}$, tels que $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} \mathbin{/} \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}\}$ (on dit que $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est le plan vectoriel* **associé** *à $\mathcal{P}$, ou encore sa* **direction***). On appelle* **vecteur directeur** *de $\mathcal{S}$ tout vecteur non nul de $\overrightarrow{\mathcal{S}}$.*

Définition 1. 2. *Si S_1 et S_2 sont deux droites ou deux plans de $\mathcal{E}$, et si $\overrightarrow{S_1} = \overrightarrow{S_2}$, on dit que S_1 et S_2* **ont même direction***; si de plus $S_1 \neq S_2$, on dit alors que S_1 et S_2 sont* **parallèles***. Enfin, si la droite D n'est pas contenue dans le plan P, et si $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$, on dit que D est* **parallèle** *à P.*

Définition 1. 3. *Si O est un point de $\mathcal{E}$, et $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, on dit que $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est un* **repère** *de $\mathcal{E}$. On appelle* **coordonnées** *du point M dans le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.*

Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$ est un vecteur directeur de la droite (D), et si $A\colon (x_A, y_A, z_A) \in (D)$, on peut représenter (D) par le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

(qui signifie que l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) données par ces formules décrit (D) quand t varie); de même, si un plan $\mathcal{P}$ passe par $A\colon (x_A, y_A, z_A)$ et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{v} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ et $\overrightarrow{v'} = \alpha'\mathbf{i} + \beta'\mathbf{j} + \gamma'\mathbf{k}$ (c'est-à-dire que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$, non colinéaires, sont contenus dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ associé à $\mathcal{P}$), il sera représenté par

$$\begin{cases} x = \alpha t + \alpha' u + x_A \\ y = \beta t + \beta' u + y_A \\ z = \gamma t + \gamma' u + z_A. \end{cases}$$

On ne peut obtenir d'équation cartésienne d'une droite de l'espace; en revanche, tout plan peut être représenté par une équation de la forme $[Ax + By + Cz + D = 0]$.

Définition 1. 4. *Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de points de $\mathcal{E}$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de $\mathbf{R}^n$ telle que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. On appelle* **barycentre** *des A_i, pondérés par les coefficients a_i, l'unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. On montre alors que pour tout point O, on a*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Les barycentres possèdent la propriété d' «associativité» : le barycentre G de la famille (A_i, α_i) est barycentre des «barycentres partiels» de sous-familles des (A_i, α_i) (formant une partition de la famille complète), chaque «barycentre partiel» étant pondéré par la somme des coefficients des points auquel il correspond.

2 Produit scalaire, orthogonalité.

Définition 2. 1. *On définit une loi de composition (externe) sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ par $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}.\mathbf{v} \in \mathbf{R}$ (le* **produit scalaire***) en choisissant une base, et en posant $(x, y, z).(x', y', z') = xx' + yy' + zz'$. Dans une telle base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on aura donc $\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{i}.\mathbf{k} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = 0$ (base* **orthogonale***) et $\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1$ (base* **orthonormale***). On montre que la formule du produit scalaire reste vraie dans toute autre base orthonormale.*

Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire que, posant $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}.\mathbf{v}$ (f: $\overrightarrow{\mathcal{E}}^2 \to \mathbf{R}$) :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^3 \times \mathbf{R},\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{w});$$
$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \qquad \text{(symétrie)};$$
$$f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$$
$$f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0;; \Longleftrightarrow\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad (f \text{ est définie positive}).$$

On note $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}.\mathbf{u}$ (carré scalaire) et $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^2}$ (norme de $\mathbf{u}$) ; et on définit la distance $AB = d(A, B)$ par $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Définition 2. 2. *On dit que $\mathbf{u}$ est unitaire si $\|\mathbf{u}\| = 1$.*

Définition 2. 3. *On dit que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont* **orthogonaux** *si $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$; si S_1 et S_2 sont deux sous-espaces de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, on dit qu'ils sont* **orthogonaux** *si tout vecteur de S_1 est orthogonal à tout vecteur de S_2; enfin, on dit que la droite D est* **orthogonale** *au plan $\mathcal{P}$ (par exemple) si $\overrightarrow{D}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$; on dit aussi parfois que S_1 est* **perpendiculaire** *à S_2 si S_1 est orthogonal à S_2 et si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, cette nuance n'ayant d'aolleurs d'intérêt que pour des droites de l'espace.*

Un vecteur orthogonal à un plan (ou à une droite) s'appelle encore un vecteur **normal** (à ce plan). En repère orthonormal, le plan d'équation $[Ax + By + Cz + D = 0]$ a pour vecteur normal $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$.

Définition 2. 4. *On appelle* **projection orthogonale** *d'un point P sur S (droite ou plan) le point $P_0 \in S$ tel que $\overrightarrow{P_0P}$ soit orthogonal à S.*

3 Distances et angles.

Définition 3. 5. *On appelle* **angle** *de deux vecteurs unitaires du plan* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{u}'$*, noté* $(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{u}'})$*, l'angle de la rotation vectorielle* r *telle que* $r(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$ *(voir ch. 22).*

Définition 3. 6. *On montre que* $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})$ *(avec la définition précédente, dans un plan contenant* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$*; c'est pourquoi on pose en général* $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\alpha$*,* α *s'appelant l'***angle non orienté** *de* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$.

Définition 3. 7. *On appelle* **angle de deux droites** *du plan,* D *et* D'*, l'angle (orienté) de deux vecteurs directeurs de ces droites, noté* $(\widehat{D,D'})$*, et défini à* π *près.*

On a, dans le plan, les «formules de Chasles»

$$(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{u}'}) + (\widehat{\mathbf{u}',\mathbf{u}''}) = (\widehat{\mathbf{u},\mathbf{u}''}) \text{ et } (\widehat{D,D'}) + (\widehat{D',D''}) = (\widehat{D,D''}).$$

Définition 3. 8. *On appelle* **angle de deux droites de l'espace** *l'angle de leurs vecteurs directeurs (à* π *près),* **angle de deux plans** *l'angle de leurs vecteurs normaux (à* π *près), et* **angle d'une droite et d'un plan** *l'angle de cette droite et de sa projection orthogonale sur le plan.*

Définition 3. 9. *On appelle* **distance** *de deux ensembles* A *et* B *le nombre* $d(A,B) = \inf_{(P,Q)\in A\times B} d(P,Q)$*; si* A *est un point et* S *une droite ou un plan,* $d(A,S) = AA_0$*, o-* A_0 *est la projection orthogonale de* A *sur* S*; si* D *et* D' *sont deux droites de l'espace,* $d(D,D') = IJ$*, o-* I *et* J *sont les pieds de la perpendiculaire commune à* D *et* D'.

Si $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $[Ax + By + Cz + D = 0]$, et si M a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0), on a

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4 Produit vectoriel.

Définition 4. 1. *On appelle* **produit vectoriel** *de deux vecteurs* $\mathbf{v}$ *et* $\mathbf{w}$ *le vecteur* $\mathbf{x} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *normal au plan* $(\mathbf{v},\mathbf{w})$*, de norme* $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\sin(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}})$ *et d'orientation telle que* $\det(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x})$ *soit positif.*

Cette définition suppose que le repère $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ soit «direct», c'est-à-dire que $\mathbf{k} = \mathbf{i}\wedge\mathbf{j}$. Dans un tel repère, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel est une application bilinéaire antisymétrique, c'est-à-dire que, posant $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ ($f\colon \overrightarrow{\mathcal{E}}^2 \to \mathcal{E}$) :

$$\forall(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\lambda) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^3 \times \mathbf{R},\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \lambda f(\mathbf{u},\mathbf{w});$$
$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v},\mathbf{u}) \qquad \text{(antisymétrie)}.$$

On a la relation suivante (définissant le «produit mixte») :

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}).$$