22. TRANSFORMATIONS ET DÉPLACEMENTS

1 Définitions générales.

1.1 Introduction.

Comme on l'a dit au chapitre 7, on appelle *transformation* (du plan ou de l'espace) une application de l'espace dans lui-même (en fait, certaines transformations classiques ne sont pas partout définies, mais ce n'est pas le cas de celles que nous étudierons) ; la plupart des transformations (à l'exception des projections) sont même des bijections. Si donc f est une transformation du plan $\mathcal{P}$, par exemple, on note comme d'habitude $f(M)$ l'image du point M par f, et $f((D))$ l'image de la droite (D) (c'est-à-dire l'ensemble des points $f(M)$, quand M décrit (D)). Les transformations usuelles sont définies par des «règles» géométriques (par exemple la translation de vecteur $\mathbf{v}$ est définie par $(\forall M)(\overrightarrow{Mf(M)} = \mathbf{v})$), ou par la donnée des coordonnées de $f(M)$ en fonction de celles de M : on parle alors des équations (ou des «formules») de f; ainsi, on écrira $M\colon(x,y) \mapsto f(M) = M'\colon(x+3, y-2)$ ou encore

$$M \left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right._{(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})} \longmapsto g(M) = M' \left|\begin{array}{l} x' \\ y' \end{array}\right._{(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})} \qquad \text{avec} \quad (E)\left\{\begin{array}{l} x' = 2x - 2y + 1 \\ y' = 2x + 2y - 3 \end{array}\right.$$

Une représentation graphique complète de la transformation est en général impossible; aussi on illustre f par des exemples représentant (dans le même plan) certains points et leurs images; ce mode de représentation doit rester lisible (on essaiera d'employer plusieurs couleurs), et on s'attache à représenter surtout les aspects caractéristiques de f, comme on le verra plus loin.

1.2 Invariants.

On dit qu'un point P est invariant dans une transformation f (ou que c'est un *point fixe* de f) si $f(P) = P$; on verra que la recherche des points fixes (qui dans une définition analytique de F revient à résoudre le système $x' = x$, $y' = y$) permet de caractériser de nombreuses transformations. Plus généralement, on dit qu'un ensemble $\mathcal{A}$ est invariant (par f) si $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$; il s'agit là d'invariance globale, car les points de $\mathcal{A}$ ne sont pas forcément fixes (un ensemble dont tous les points sont fixes est dit invariant point par point). Ainsi, les translations (de vecteur $\mathbf{v}$ non nul) n'ont pas de points fixes, mais les droites parallèles à $\mathbf{v}$ sont (globalement) invariantes. Plus généralement encore, on dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est invariante par f (ou que f conserve cette propriété) si $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{P}(f(\mathcal{A}))$; ainsi, on dit que f conserve les alignements si A, B et C alignés $\Rightarrow$ $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ alignés; et la phrase : «les angles sont invariants par homothétie» signifie que (si h est une homothétie) on a (pour tous points A, B et C) : $(\widehat{AB, AC}) = (\widehat{h(A)h(B), h(A)h(C)})$.

1.3 Groupes de transformations.

La composition des transformations $((f,g) \mapsto g \circ f)$ étant une loi associative, l'ensemble des transformations bijectives forme un groupe; les sous-groupes sont donc des ensembles $\mathcal{S}$ de transformations bijectives tels que (1) $f \in \mathcal{S}$ et $g \in \mathcal{S} \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{S}$, (2) $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \in \mathcal{S}$ et (3) $f \in \mathcal{S} \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{S}$ (on montre aisément que c'est équivalent à ce que $\mathcal{S}$ est non vide et vérifie (4) $f \in \mathcal{S}, g \in \mathcal{S} \Rightarrow g^{-1} \circ f \in \mathcal{S}$). L'étude et la classification de ces groupes a eu une importance historique considérable (on a pu définir la géométrie comme l'étude des propriétés invariantes par certains sous-groupes, et la cristallographie est la première science appliquée à avoir utilisé les résultats de classification des groupes (finis) de déplacements) ; mais (la théorie des groupes étant hors-programme) nous n'utiliserons ce langage que pour des classifications simples, et pour les calculs de décomposition qui seront vus plus loin.

1.4 Transformations affines.

On dit qu'une transformation est affine si elle conserve l'équipollence, c'est-à-dire que (pour tout A, B, C et D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$. Le vecteur $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ ne dépendant pas du choix de représentant (A, B), il est alors naturel de définir une application (notée $\vec{f}$) de $\vec{\mathcal{E}}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$, définie par $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, qu'on appelle l'application vectorielle associée à f. On peut démontrer (mais c'est hors-programme) qu'avec des hypothèses supplémentaires très faibles (de continuité) sur f, $\vec{f}$ est nécessairement linéaire ; on se placera désormais dans ce cas. On vérifie aisément que réciproquement, la connaissance de $\vec{f}$ et du point $f(O)$ (où O est une «origine» quelconque) détermine f. On en déduit les «formules» de f dans un repère, en utilisant la théorie (matricielle) sur f du chapitre 18 ; on voit qu'en général on aura

$$M \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right._{(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})} \quad \mapsto \quad f(M) = M' \left| \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right._{(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})} \quad \text{avec} \quad (E) \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + x_0 \\ y' = bx + b'y + b''z + y_0 \\ z' = cx + c'y + c''z + z_0 \end{cases}$$

On démontre aisément que les transformations affines conservent les droites et le parallélisme, et que l'ensemble des transformations affines est un groupe. Un calcul simple montre aussi qu'elles conservent le barycentre ; on démontre que c'est une propriété caractéristique.

1.5 Le groupe des homothéties-translations.

Un cas particulier important est l'ensemble des transformations affines f telles que, pour toute droite δ, la droite $f(\delta)$ soit parallèle à δ. On voit aisément qu'avec le langage du chapitre 19, tout vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$ doit alors être un vecteur propre de $\vec{f}$, ce qui montre que la matrice de $\vec{f}$ est diagonale (dans toute base) et donc que $\vec{f} = \lambda Id_{\vec{\mathcal{E}}}$ (comme on le voit aisément). Si $\lambda = 1$, il est clair que f doit être une translation (de vecteur $\overrightarrow{Of(O)}$) : sinon, $\vec{f}$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ ; on montrera alors en classe que f possède un point fixe unique C, et on dit que f est l'homothétie de centre C et de rapport λ ; f est définie par la «formule» $(\forall M)$ $\overrightarrow{Cf(M)} = \lambda\overrightarrow{CM}$. La composée de deux homothéties vectorielles (de rapports λ et λ') étant une homothétie vectorielle de rapport $\lambda\lambda'$, on voit que la composée de deux homothéties en est une si leurs rapports ne sont pas inverses l'un de l'autre ; pour obtenir un groupe de transformations, il est plus simple d'adjoindre aux homothéties les translations (dont on dit parfois qu'elles sont des homothéties de centre «à l'infini»). Il faudra donc en pratique surveiller les cas particuliers : on verra ainsi en exercice qu'étant donnés deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ il y a en général deux homothéties h_1 et h_2 telles que $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$, mais l'une d'elles est remplacée par une translation si les deux cercles ont le même rayon. Un calcul simple montre que si h est une homothétie de rapport λ, on a $h(A)h(B) = |\lambda|AB$, et que les homothéties conservent les angles : on dit qu'elles conservent les proportions (la réciproque n'est pas vraie : les transformations ayant cette propriété sont les «similitudes directes» ; on montrera en exercice que ce sont les composées d'homothéties et de déplacements)

2 Isométries et déplacements.

2.1 Définitions.

On appelle *isométries* les transformations qui conservent les distances (c'est-à-dire que $f(A)f(B) = AB$). On montrera en classe que ce sont des transformations affines ; les relations métriques permettent déjà de montrer que ces transformations conservent l'orthogonalité, et qu'elles conservent la valeur absolue des angles. Les translations (et les homothéties de rapport -1) constituent des cas particuliers ; on sait qu'il en est de même des symétries orthogonales que l'on caractérisera plus loin. Remarquant que l'on doit avoir (si f et g sont deux isométries) $g(f(A))g(f(B)) = f(A)f(B) = AB$, on voit que les isométries forment un groupe.

2.2 Caractérisation vectorielle.

On montrera en classe que la transformation vectorielle associée à une isométrie f (appelée *isométrie vectorielle*) conserve le produit scalaire (c'est-à-dire que $\vec{f}(\mathbf{u})\vec{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{uv}$) et que la réciproque est vraie, grâce à l'identité $\mathbf{uv} = (\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| - \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|)/2)$; on en déduit que la matrice de $\vec{f}$ dans une base orthonormale doit être une matrice orthogonale (voir l'interlude précédent), c'est-à-dire encore que l'image d'une base orthonormale par $\vec{f}$ doit être orthonormale (ce qui est une propriété caractéristique). On a vu que le déterminant d'une telle matrice est 1 ou -1 ; on dit que f est un *déplacement* si $\det(\vec{f}) = 1$ (et un *antidéplacement* si $\det(\vec{f}) = -1$) ; cette définition ne dépend pas du choix de la base, comme on l'a montré en Algèbre (car $\det(PMP^{-1}) = \det M$).

2.3 Propriétés affines et métriques.

Les figures usuelles de la géométrie (classique) ont leurs propriétés conservées par les isométries : l'image d'un cercle est un cercle (de même rayon), l'image de deux plans parallèles est deux plans parallèles (de même distance), etc ... Comme on l'a vu, les angles sont conservés «en valeur absolue» ; dans le plan (supposé repéré par une base directe), les isométries qui conservent les angles sont les déplacements (qui forment donc un sous-groupe de transformation) ; les antidéplacements «renversent» les angles (et on utilise cette caractéristique pour montrer que le produit de deux anti-déplacements est un déplacement, par exemple).

2.4 Déplacements et changements de repères.

Soit $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ deux repères orthonormaux (de même orientation) ; il existe un automorphisme (unique) de $\vec{\mathcal{E}}$, φ, tel que $\varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath}'$, $\varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}'$ et $\varphi(\vec{k}) = \vec{k}'$. De plus, φ est une isométrie vectorielle, de déterminant 1. Soit alors f définie par $\overrightarrow{Af(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$; on vérifiera que cette «formule» définit bien une transformation affine, qui est donc un déplacement d'après les caractérisations précédentes, et qui «envoie» le premier repère sur le second. Considérons alors le «changement de repère» correspondant : un point M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}_1$ vérifie donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, de même, si (X, Y, Z) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}_2$, on aura $\overrightarrow{AM} = X\vec{\imath}' + Y\vec{\jmath}' + Z\vec{k}'$ et donc, par définition, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + X\varphi(\vec{\imath}) + Y\varphi(\vec{\jmath}) + Z\varphi(\vec{k}) = \overrightarrow{OA} + \varphi(X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k})$. Soit alors M' le point de coordonnées (X, Y, Z) dans $\mathcal{R}_1$, cherchons $f(M')$: on doit avoir $\overrightarrow{Af(M')} = \varphi(\overrightarrow{OM'}) = \overrightarrow{AM}$ comme on vient de le voir, ce qui montre que $M = f(M')$, ou encore que $M' = f^{-1}(M)$; cette dernière formule donnant donc les «formules» de changement de repère comme identiques à celles du déplacement amenant le second repère sur le premier; c'est l'équivalent géométrique du principe de relativité : les déplacements de l'objet sont «équivalents» aux déplacements «opposés» de l'observateur.

3 Classification des isométries.

3.1 Isométries du plan.

La méthode générale de classification consiste à déterminer les points fixes de f : supposant d'abord qu'un point fixe C existe, on se ramène en prenant ce point pour origine à une isométrie vectorielle; les autres points fixes invariants correspondent alors aux vecteurs invariants par $\vec{f}$, c'est-à-dire aux vecteurs propres de valeur propre 1; ils forment donc un sous-espace de $\vec{\mathcal{E}}$; dans le plan, on ne peut donc avoir que l'identité, une droite invariante (point par point), ou la nouvelle origine C comme unique point fixe. On vérifie aisément que le cas d'une droite Δ invariante correspond à une symétrie orthogonale par rapport à cette droite (on note en général $f = \mathrm{Sym} \perp /\Delta$), et on construira en classe les équations correspondantes; les symétries orthogonales sont des antidéplacements. Le cas d'un point fixe unique s'appelle une *rotation* : on montre aisément qu'il s'agit de la transformation définie par $Cf(M) = CM$ et $(\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{Cf(M)}}) = \alpha$, où α est une constante (ne dépendant pas de M) qu'on appelle l'angle de la rotation; on note en général $f = \mathrm{Rot}(C, \alpha)$. Les rotations sont des déplacements, et on a (dans un repère direct)

$$f = \mathrm{Rot}(C, \alpha) \Rightarrow \mathrm{Matrice}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

À l'aide de cette interprétation vectorielle, on vérifie aisément que (pour tout A et B) on a $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A)f(B)}}) = \alpha$; on montre que c'est une propriété caractéristique des rotations.

Le cas sans point fixe est un peu plus délicat; étudiant g, composée de f par la translation de vecteur $\overrightarrow{f(C)C}$ (qui est une isométrie de point fixe C), on montre que f est nécessairement une translation ou un antidéplacement, et qu'alors f est la composée de la symétrie orthogonale g par une translation de vecteur parallèle à l'axe de symétrie; mais l'étude détaillée de ces transformations (les *glissements-réflexions*) est hors-programme.

3.2 Décomposition en symétries.

Il est clair que le produit de deux symétries orthogonales est un déplacement : une translation si les axes sont parallèles; une rotation autour de leur point d'intersection sinon. Une analyse plus précise montre que si $(\widehat{\Delta, \Delta'}) = \alpha$ (à π près), et si $f = \mathrm{Sym} \perp /\Delta$ et $g = \mathrm{Sym} \perp /\Delta'$, on a $g \circ f = \mathrm{Rot}(C, 2\alpha)$ (où $\{C\} = \Delta \cap \Delta'$). Réciproquement, toute rotation peut s'exprimer de cette manière; ce type de décomposition permet des calculs «géométriques» simplifiés : ainsi, soit f la symétrie orthogonale par rapport à la droite $[\![Y = (\tan\alpha)X]\!]$, et g la symétrie par rapport à (Ox) (dont l'équation est $g(x, y) = (x, -y)$), on voit que $f = (g \circ g) \circ f = g \circ (g \circ f)$; comme la transformation $g \circ f$ est la rotation de centre O et d'angle -2α, on voit que f aura pour «équation»

$$f(x, y) = \big((\cos 2\alpha)x + (\sin 2\alpha)y, (\sin 2\alpha)x - (\cos 2\alpha)y\big)$$

On verra en exercice comment utiliser la même idée pour déterminer le centre de la composée de deux rotations.

3.3 Rotations dans l'espace.

La même technique montre à présent que si f n'est pas l'identité (de $\mathcal{E}$), l'ensemble des points fixes de f est un plan, une droite, un point ou l'ensemble vide. On montre aisément que le premier cas correspond à une symétrie orthogonale (par rapport à ce plan); les autres antidéplacements de $\mathcal{E}$ (d'ailleurs sans grand intérêt pratique) étant hors-programme, on va supposer à présent que f est un déplacement. Utilisant la matrice de $\vec{f}$ et la théorie des valeurs propres, on verra (en exercice) que les déplacements n'ont pas de points fixes ou une droite fixe (point par point); étudiant alors la restriction à un plan orthogonal à cette droite Δ, on verra que c'est une rotation (autour de l'intersection du plan et de la droite) d'un angle α ne dépendant pas du plan; on dit que le déplacement est une rotation d'axe Δ et d'angle α (il subsiste un problème d'orientation : on verra en classe comment le résoudre). La détermination pratique de l'axe et de l'angle quand on connaît les équations de f se fait en déterminant d'abord l'ensemble des points fixes, puis en cherchant l'angle $(\widehat{\mathbf{u}, \vec{f}(\mathbf{u}})$ pour un vecteur $\mathbf{u}$ orthogonal à l'axe (on s'en procure aisément un à l'aide du produit vectoriel); réciproquement, pour établir les équations d'une telle rotation, on remarque que dans un repère d'axe OZ identique à l'axe de rotation, elles ont pour forme

$$M(X,Y,Z) \mapsto f(M) = M'(X',Y',Z')$$

$$\text{avec } X' = (\cos\alpha)X - (\sin\alpha)Y \ , \ Y' = (\sin\alpha)X + (\cos\alpha)Y \quad \text{et} \quad Z' = Z,$$

et on conclut par changement de repère. L'utilisation du produit vectoriel accélère les calculs, mais la technique correspondante est assez délicate; on la verra en TD.

Les autres déplacements de $\mathcal{E}$ n'ont donc pas de points fixes; par composition avec une translation, on voit qu'il s'agit de composés d'une rotation autour d'un axe Δ et d'une translation de vecteur $\mathbf{v}$ parallèle à Δ; un tel déplacement s'appelle un *vissage* (d'axe Δ, d'angle α et de pas $\mathbf{v}$), mais nous n'en ferons pas d'étude détaillée (qui constituait la théorie des *torseurs*, à présent hors-programme).

4 Applications.

4.1 Orientation.

Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux repères de $\mathcal{E}$, on a vu qu'il y a une isométrie unique envoyant $\mathcal{R}_1$ sur $\mathcal{R}_2$; on dit que les deux repères ont même orientation si cette isométrie est un déplacement; et cela revient en fait à dire que le déterminant de l'une des bases dans l'autre vaut 1. En pratique, dans le plan, on aura donc des repères directs (traditionnellement, ils correspondent à un angle $(\widehat{\vec{\imath}, \vec{\jmath}}) = +\pi/2$); et il suffit d'en définir un, par la règle d'Ampère par exemple. Mais si on plonge le plan dans l'espace, on voit qu'il réapparait une difficulté (quel est le «bon» côté du plan ?), et il n'existe évidemment pas de règle universelle possible; on conviendra donc d'orienter le plan $\mathcal{P}$ par le choix (arbitraire) d'un de ses deux vecteurs normaux unitaires (ce qui peut sembler paradoxal); si $\mathbf{n}$ est le vecteur choisi, et si $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire de $\mathcal{P}$, on convient que $(\mathbf{u}, \mathbf{n} \wedge \mathbf{u})$ est une base (orthonormale) directe de $\mathcal{P}$.

De même, dans l'espace, une base (orthonormale) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sera dite directe si $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$; cette définition peut sembler sans ambigüité, mais nécessite comme on l'a vu au chapitre précédent un choix initial, et les règles du genre «trois doigts de la main droite» supposent connu un objet (matériel) de référence. Le problème théorique et pratique ainsi soulevé (et dont les divers déguisements peuvent donner lieu à d'intéressantes questions du genre «Pourquoi les miroirs renversent-ils la droite et la gauche, et non le haut et le bas ?») a fini par avoir des conséquences physiques concrètes (les problèmes de «parité»); ces études géométriques de problèmes apparemment simples et sans grand intérêt débouchent d'ailleurs parfois sur d'étranges résultats; on verra ainsi en classe une autre propriété surprenante de l'espace ordinaire : la différence entre les torsions de 2π et de 4π, qui pouvait difficilement être devinée sans une analyse mathématique très fine du même genre.

4. 2 Composition des déplacements.

La composition de deux rotations de l'espace est un déplacement, mais ce n'est pas en général une rotation, et même si c'est le cas, son axe semble difficile à déterminer analytiquement. Décomposant chaque rotation en un produit de deux symétries planes, on voit qu'on peut (si les axes se coupent) choisir les plans de telle sorte que deux de ces symétries «s'annulent», ce qui résoud le problème. D'autres cas seront étudiés en exercice; plus généralement encore, ce type de décomposition permet de «factoriser» (souvent sous forme unique) des produits de transformations plus générales (homothéties, similitudes, ...)

4. 3 Lieux géométriques, transformations de configurations.

Cherchons par exemple à construire un triangle équilatéral de sommet A donné et tel que les deux autres sommets B et C soient sur deux droites (données) δ et δ'. Supposant le problème résolu, effectuons une rotation r de centre A amenant B en C; on voit que $r(\delta)$ doit contenir $r(B) = C$, ce qui montre que C est l'intersection de δ' et de $r(\delta)$. Mais $r(\delta)$ peut être construite sans connaître B (puisque son angle est $\pi/3$ ou $-\pi/3$); on voit donc qu'on a réduit le problème à savoir si C ainsi construit convient. On verra en classe comment analyser de même des problèmes du type «Quel est l'ensemble des ... quand ... décrit une ... ?» (*Lieu géométrique*).

Les transformations laissant invariantes certaines propriétés peuvent être appliquées de manière non triviale à des configurations remarquables ayant ces propriétés : ainsi, il y a deux homothéties laissant invariant deux cercles et leurs tangentes communes; on verra comment en déduire la position de ces tangentes. De même, l'homothétie ayant pour centre l'isobarycentre d'un triangle, et de rapport $-1/2$ transforme les hauteurs en médiatrices; on verra en TD l'ingénieuse démonstration qui a permis à Euler d'en déduire l'existence du «cercle des neuf points».

4. 4 Utilisation des complexes.

Si on représente les points du plan par leurs affixes, les déplacements du plan sont représentés par des calculs «algébriques» : on vérifie aisément en effet que si c est l'affixe de C, z l'affixe de M et Z l'affixe de $f(M)$, on a pour une homothétie de rapport k : $Z - c = k(z - c)$ et pour une rotation d'angle α : $Z - c = e^{i\alpha}(z - c)$ (on voit d'ailleurs que le cas général $Z - c = z_0(z - c)$ doit correspondre à une similitude directe); les déplacements du plan correspondent donc aux fonctions affines $f(z) = az + b$ (avec la condition $|a| = 1$; le cas général donne une similitude directe), dont l'étude est évidemment plus facile; réciproquement, ces fonctions pourraient par exemple servir d'approximations à des fonctions plus compliquées (DL_1 de ces fonctions par exemple), leur donnant ainsi un sens géométrique : c'est par un raisonnement analogue qu'on détermine en Mécanique des centres de rotations instantanées, ou que s'expliquent les spirales qui jalonnent les ensembles de complexes (comme l'ensemble de Mandelbrot) obtenus en théorie du chaos.

Exercices

1 ($\star\star$) Soit f une transformation du plan $\mathcal{P}$ (une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$) ayant un point fixe unique, C ; et g une autre transformation de $\mathcal{P}$, qui commute avec f (c'est-à-dire que $g\circ f = f\circ g$) Montrer que C est aussi l'unique point fixe de g. Montrer que ce résultat n'est plus valable si C n'est pas unique, en prenant pour f la symétrie orthogonale d'axe Δ, et pour g une translation d'un vecteur directeur de Δ.

2 ($\star\star\star$) Soit f la transformation du plan (privé de l'origine O) définie par : $M\mapsto f(M)=N$ tel que $\overrightarrow{OM}$ colinéaire à $\overrightarrow{ON}$ et $\overline{OM}\times\overline{ON}=1$ (cette transformation s'appelle une *inversion* de centre O). Montrer (par le calcul dans un repère bien choisi) que l'image d'un cercle $\mathcal{C}$ par f est un autre cercle si $O\notin\mathcal{C}$, et une droite si $O\in\mathcal{C}$.

3 ($\star\star$) Soit (D) et (D') deux droites du plan telles que $\widehat{(D),(D')}\neq\pm\pi/3$, et A un point du plan n'appartenant pas à $D\cup D'$. Montrer qu'il existe (exactement) deux triangles équilatéraux ABC tels que $B\in(D)$ et $C\in(D')$ (on pourra «supposer le problème résolu»). Que se passe-t-il si $\widehat{(D),(D')}=\pm\pi/3$?

4 ($\star\star$) Soit f la transformation de l'espace (rapporté à un repère orthonormé) donnée par $f(x,y,z)=(x',y',z')$, avec $\begin{cases} x'=y+a\\ y'=z+b\\ z'=x+c\end{cases}$. Quelle relation entre a, b, et c doit être satisfaite pour que f soit une rotation ? Déterminer dans ce cas l'axe et l'angle de cette rotation. Quelle est la nature de f quand cete relation n'est pas vérifiée ?

5 ($\star\star$) Soit, dans le plan $\mathcal{P}$, h l'homothétie de centre A et de rapport $k\neq 1$, r la rotation de centre B et d'angle $\alpha\neq 2n\pi$. Déterminer la nature de $f=h^{-1}\circ r\circ h$, et préciser les éléments caractéristiques de f.

T 42 Soit, dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, r_1 la rotation d'axe $(O,\vec{\imath})$ et d'angle α, et r_2 la rotation d'axe $(O,\vec{\jmath})$ et d'angle β (avec $\alpha\beta\neq 0$). Déterminer analytiquement la nature de la transformation $r_2\circ r_1$, puis montrer qu'on peut retrouver «géométriquement» le résultat obtenu, en décomposant r_1 et r_2 en symétries planes bien choisies.

6 ($\star\star\star$) Soit D et D' deux droites non coplanaires de vecteurs directeurs unitaires $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$. Montrer que si s est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, on a $s(D)\neq D'$. Montrer qu'il en est de même si s est une symétrie centrale. Montrer que si s est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ telle que $s(D)=D'$, l'un des vecteurs $\mathbf{d}+\mathbf{d}'$ ou $\mathbf{d}-\mathbf{d}'$ est un vecteur directeur de Δ; achever alors l'analyse en montrant qu'il existe exactement deux telles droites Δ (on pourra utiliser l'image par s de la perpendiculaire commune à D et D').

7 ($\star\star$) On se propose de déterminer toutes les rotations de l'espace laissant un cube $(ABCDA'B'C'D')$ invariant (globalement). Montrer d'abord qu'une telle rotation laisse au plus deux sommets du cube fixés, et que l'axe de la rotation doit passer par le centre du cube. Achever alors l'analyse en montrant qu'il existe exactement 23 rotations (en ne comptant pas l'identité) qui conviennent.

22. TRANSFORMATIONS ET DÉPLACEMENTS

Plan

22. TRANSFORMATIONS ET DÉPLACEMENTS

(Formulaire)

1 Définitions générales.

Définition 1. 1. *On appelle* **transformation** *(du plan ou de l'espace) une application f de l'espace dans lui-même; on dit qu'un point P est* **invariant** *par f si $f(P) = P$, et plus généralement qu'un ensemble A est* **globalement invariant** *si $f(A) = A$; enfin, on dira qu'une propriété $\mathcal{P}$ est* **conservée** *par f si, pour tout ensemble A tel que $\mathcal{P}(A)$, on a aussi $\mathcal{P}(f(A))$.*

Définition 1. 2. *On dit qu'une transformation est* **affine** *si elle conserve l'équipollence, c'est-à-dire que (pour tout A, B, C et D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$; on démontre que si f est une transformation affine, l'application (notée $\overrightarrow{f}$, et appelée* **application vectorielle associée à** *f) définie par $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ est un endomorphisme de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. L'ensemble des transformations affines forme un groupe, et en général, on a les «formules»*

$$M \left|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right._{(O,\vec\imath,\vec\jmath,\vec k)} \quad \mapsto \quad f(M) = M' \left|\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right._{(O,\vec\imath,\vec\jmath,\vec k)} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + x_0 \\ y' = bx + b'y + b''z + y_0 \\ z' = cx + c'y + c''z + z_0 \end{cases}$$

Les transformations affines conservent les droites et le parallélisme, ainsi que le barycentre; on démontre que ce sont des propriétés caractéristiques. L'ensemble des transformations affines forme un groupe.

Définition 1. 3. . *On appelle* **translation** *de vecteur $\mathbf{v}$ la transformation f définie par : $(\forall M)$ $\overrightarrow{Mf(M)} = \mathbf{v}$. On appelle* **homothétie** *de centre C et de rapport λ la transformation f définie par : $(\forall M)$ $\overrightarrow{Cf(M)} = \lambda\overrightarrow{CM}$. La réunion des homothéties et des translations forme un groupe.*

2 Isométries et déplacements.

Définition 2. 1. *On appelle* **isométries** *les transformations qui conservent les distances (c'est-à-dire que $f(A)f(B) = AB$). L'ensemble des isométries est un sous-groupe de celui des transformations affines*

Définition 2. 2. *On appelée* **isométries vectorielles** *les transformations vectorielles associées aux isométries; ce sont les endomorphismes qui conservent le produit scalaire (c'est-à-dire que $\vec f(\mathbf{u})\vec f(\mathbf{v}) = \mathbf{uv}$) on en déduit que la matrice de $\vec f$ dans une base orthonormale est une matrice orthogonale, c'est-à-dire encore que l'image d'une base orthonormale par $\vec f$ est orthonormale.*

Définition 2. 3. *On appelle* **déplacements** *les isométries f telles que $\det(\overrightarrow{f}) = 1$, c'est-à-dire celles qui conservent l'orientation, et* **antidéplacements** *les autres isométries (pour lesquelles $\det(\overrightarrow{f}) = -1$).*

Dans le plan, les déplacements conservent les angles et les antidéplacements les renversent.

Définition 2. 4. *Dans le plan, on appelle* **rotation** *de centre C et d'angle α (notée $\mathrm{Rot}(C,\alpha)$) la transformation r telle que pour tout point M, $CM = Cf(M)$ et $(\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{Cf(M)}}) = \alpha$.*

Dans un repère direct, on a

$$f = \mathrm{Rot}(C,\alpha) \Rightarrow \mathrm{Matrice}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

On montre que tout déplacement est une translation ou une rotation; les anti-déplacements ayant un point fixe sont les symétries orthogonales. Toute rotation $r = \mathrm{Rot}(C,\alpha)$ peut s'exprimer comme un produit de deux symétries orthogonales (autour d'axes passant par C et formant un angle $a/2$).

Définition 2. 5. *Les déplacements de l'espace ayant un point fixe sont les* **rotations** *d'angle α autour d'un axe Δ, définies comme formées de rotations de centre appartenant à Δ et d'angle α dans chaque plan orthogonal à l'axe (orienté par la direction de l'axe); dans un repère direct $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où $\vec{\imath}$ est un vecteur directeur de Δ, on a*

$$f = \mathrm{Rot}(\Delta,\alpha) \Rightarrow \mathit{Matrice}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$