

23. COURBES ET SURFACES

1 Systèmes de coordonnées.

1.1 Définitions générales.

On appelle système de coordonnées («curvilignes») du plan ou de l'espace une application F du plan dans \mathbf{R}^2 (ou de l'espace dans \mathbf{R}^3) «suffisamment régulière» (en pratique, les formules de changement de coordonnées qu'on verra plus bas doivent être de classe \mathcal{C}^∞) et injective (pour que des coordonnées données repèrent un seul point); si $F(M) = (x, y)$ par exemple, on dit que x et y sont les coordonnées de M dans le système F (par abus de langage, on verra que dans le cas des coordonnées polaires, on peut être amené à utiliser plutôt $G = \ll F^{-1} \gg$ application de \mathbf{R}^2 dans le plan, et qu'alors un point peut avoir plusieurs coordonnées). En Géométrie, les systèmes utilisés sont de types très simples, et on verra dans ce chapitre les plus usuels, mais pour d'autres applications (physique des matériaux, relativité générale, etc. . .), on peut être amené à utiliser des fonctions F tout à fait arbitraires. On voit que les systèmes de coordonnées cartésiennes correspondent au cas particulier $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \iff F(M) = (x, y, z)$ (qui est une bijection); en général, les ensembles de points de la forme $F^{-1}(a, y)$ ou $F^{-1}(x, b)$ sont des courbes du plan; le réseau qu'elles forment permet un repérage pratique (ainsi, on réfléchira à l'utilisation du tracé des parallèles et des méridiens par les cartographes). Pour éviter des confusions, les lettres x, y et z ne sont en fait utilisées que pour les systèmes cartésiens; les coordonnées polaires par exemple se notent θ et ρ .

1.2 Représentations paramétriques et implicites.

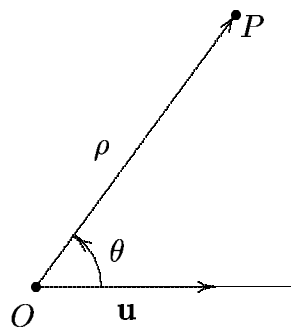
On dit qu'une fonction f (suffisamment régulière, mais non nécessairement partout définie) de \mathbf{R} ou de \mathbf{R}^2 vers le plan ou l'espace est une représentation paramétrique (ou encore un paramétrage) de son image (c'est-à-dire de l'ensemble des points de la forme $f(t)$ ou $f(u, v)$); on parle de courbe (paramétrée) dans le cas d'un paramètre, et de surface ou de nappe paramétrée dans le cas de deux paramètres. Si on ne s'intéresse qu'à l'ensemble des images, de nombreux paramétrages sont possibles, et une première question naturelle consiste à montrer que deux paramétrages se valent à ce sens : ainsi, on a vu que les «formules» $x = 1 + 2t; y = 3 + t$ «décrivent» une droite du plan; on réfléchira utilement à ce que décrit exactement le paramétrage «barycentrique» $x = \frac{1 + 3t}{1 + t}; y = \frac{3 + 4t}{1 + t}$ qui semble lui être équivalent.

La donnée d'un paramétrage se fait en général à l'aide d'un système de coordonnées, et des fonctions donnant chaque coordonnée en fonction du ou des paramètres; ces fonctions s'appellent les équations paramétriques de l'ensemble. Ce type de description présente de nombreux avantages, comme on le verra plus loin; mais il est difficile sous cette forme de savoir si un point donné appartient ou non à l'ensemble décrit. Par contre, une relation entre les coordonnées des points de l'ensemble permet immédiatement ce contrôle, et peut s'avérer commode pour déterminer certaines propriétés globales de l'ensemble (ses symétries par exemple); une telle relation s'appelle une équation cartésienne (ou polaire, etc. . .) de l'ensemble, qu'on dit alors défini de manière implicite. Dans de nombreux cas, il est assez aisé d'obtenir une telle relation

à partir d'équations paramétriques, en «éliminant les paramètres»; mais on prendra garde à ce que l'ensemble ainsi obtenu ne soit pas plus grand que l'ensemble paramétré initial (ce qu'on appelle l'étude de la réciproque). Inversement, si on détermine certaines des coordonnées en fonction des autres dans une équation cartésienne, on obtient un paramétrage (du type $x = t; y = f(t)$); mais cette description risque de n'être valable que pour une portion de l'ensemble; sa théorie générale s'appelle la méthode des fonctions implicites, et on en verra un cas particulier important dans la prochaine section.

1.3 Coordonnées polaires.

On appelle *repère polaire* d'un plan (orienté) un couple formé d'un point du plan et d'un vecteur unitaire (de norme 1); les coordonnées polaires (ρ, θ) d'un point M dans le repère (C, \mathbf{u}) sont données par $\rho = CM$ et $\theta = (\mathbf{u}, \widehat{CM})$. Réciproquement, si (ρ, θ) est un couple de réels, on lui associe le point P défini par $\overrightarrow{CP} = \rho \mathbf{v}$, où \mathbf{v} est le vecteur unitaire tel que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \theta$ (on remarquera que P n'a donc pas pour coordonnées polaires (ρ, θ) , mais $(|\rho|, \theta')$, où θ' est la mesure principale de θ si ρ est positif, et celle de $\theta + \pi$ sinon). Le point C a (conventionnellement) $(0, 0)$ pour coordonnées polaires, mais il lui correspond en fait tout couple $(0, \theta)$.



Dans un repère $(C, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, où (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est choisi orthonormal direct, le point P de coordonnées polaires (ρ, θ) a pour coordonnées cartésiennes $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$; réciproquement, on peut toujours prendre $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, mais il n'y a pas de formule parfaitement satisfaisante pour θ , comme on l'a déjà vu en cherchant l'argument d'un complexe défini sous forme algébrique; si $x \neq 0$, la formule $\theta = \text{Arc tg}(y/x)$ convient.

Les courbes $\rho = a$ sont les cercles de centre C , et les courbes $\theta = b$ sont les droites passant par C ; il n'est pas si aisé d'obtenir les équations polaires d'autres courbes simples, et on retiendra que la courbe d'équation $\rho = r / \cos(\theta - \theta_0)$ est la droite passant par le point P de coordonnées polaires (r, θ_0) et orthogonale au «rayon vecteur» \overrightarrow{CP} . On verra dans la prochaine section comment étudier des courbes générales définies par une équation polaire.

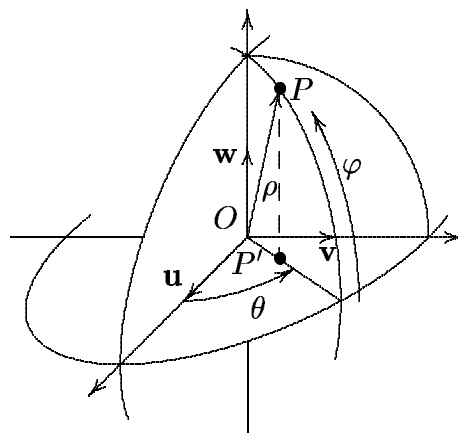
1.4 Coordonnées cylindriques et sphériques.

Les coordonnées polaires sont surtout utiles lorsqu'on veut étudier des situations stables par rotation autour de C ; de même, si un axe de l'espace est privilégié, on définira les coordonnées cylindriques par rapport à cet axe en choisissant un repère (unitaire) (O, \mathbf{k}) de l'axe, et un système de coordonnées polaires (O, \mathbf{u}) du plan orthogonal à l'axe en O . Un point P de l'espace sera alors repéré par les trois nombres (ρ, θ, z) , où $z\mathbf{k}$ est la projection (orthogonale) de OP sur l'axe, et où (ρ, θ) sont les coordonnées polaires de la projection de P sur le plan. Les formules de changement de repère correspondantes sont évidemment les mêmes qu'à deux dimensions; les surfaces correspondant à z constant sont les plans orthogonaux à l'axe, celles correspondant à θ constant sont les plans passant par l'axe, et celles correspondant à ρ constant sont les cylindres d'axe Oz , d'où le nom de ces systèmes de coordonnées. On remarquera que dans ce repère, les courbes définies par $\rho = a$ et $z = b\theta$ sont des hélices circulaires, dont la théorie est donc particulièrement simple sous cette forme.

S'il n'y a pas d'axe privilégié, ou encore si on veut surtout s'intéresser aux points d'une même sphère (cartographie à la surface de la Terre, ou astronomie de position), on utilisera un système de coordonnées sphériques, défini à partir d'un repère orthonormé direct $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de la manière suivante : on repère P par (ρ, θ, φ) en projetant P en P' sur le plan $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$,

et en posant $\rho = OP$, $\theta = (\mathbf{u}, \widehat{OP'})$ et $\varphi = (\widehat{OP'}, \widehat{OP})$ (ce dernier angle étant orienté dans le plan (O, P', P)

par la convention $(\widehat{OP'}, \mathbf{w}) = +\pi/2$). Les choix (pratiques) de repères sphériques sont souvent arbitraires; ainsi les géographes utilisent \mathbf{w} pointant vers le pôle nord, et \mathbf{u} est orienté vers le méridien de Greenwich (l'observatoire astronomique de Londres); θ est appelé la longitude et φ la latitude de P .



Un raisonnement simple sur les projections montre que si P est repéré par (ρ, θ, φ) , ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sont données par les «formules de changement de repère» $x = \rho \cos \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \cos \varphi$, et $z = \rho \sin \varphi$; les formules «inverses» (et leurs exceptions) sont laissées en exercice.

2 Courbes paramétrées planes.

Une approche de l'étude de ces courbes a été faite dans l'interlude suivant le chapitre 10; elle est reprise ici d'un point de vue plus «géométrique».

2.1 Étude globale et symétries.

De façon générale, dire qu'une courbe paramétrée \mathcal{C} (définie par $t \mapsto P(t)$) est (globalement) invariante par une transformation F , c'est dire que pour tout t , il existe t' tel que $F(P(t)) = P(t')$ (plus rigoureusement, il faut en fait aussi que la réciproque soit vraie, c'est-à-dire que $F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, mais pour les transformations usuelles (symétries et translations) c'est le cas en général). En pratique, on ne vérifie systématiquement que les symétries liées à la parité : pour un repère cartésien, et une courbe paramétrée par $x = f(t)$ et $y = g(t)$, si f est paire et g impaire par exemple, la courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox . On verra en exercice comment démontrer rigoureusement une symétrie plus générale (envisagée par exemple d'après le tracé approché de la courbe).

On décompose alors le domaine (l'intersection des domaines de f et g) en réunion d'intervalles (les «intervalles d'étude»); il peut être intéressant (mais ce n'est nullement obligatoire) de déterminer des intervalles où l'une des deux fonctions f ou g est monotone (et continue), car alors on aura par exemple $x = f(t)$ bijective sur $]t_1, t_2[$ et donc (sur cet intervalle) $t = f^{-1}(x)$ et $y = g(f^{-1}(x))$, ce qui ramène l'étude de la courbe à celle du graphe de $g \circ f^{-1}$. Mais cette méthode est souvent très peu pratique : on comparera par exemple l'étude de $(x = \cos 2t, y = \sin 3t)$ (une «courbe de Lissajoux») à celle de $y = \sin(3 \operatorname{Arc} \cos(x/2))$!

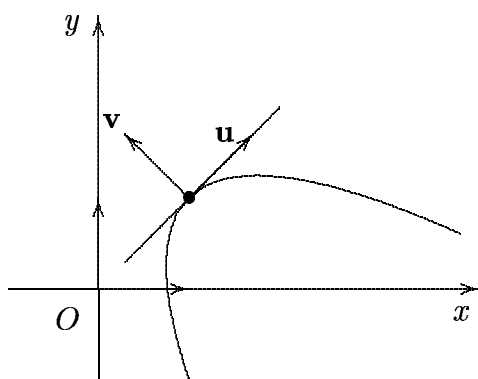
L'étude des variations de f et g est néanmoins recommandée; elle permet en effet de déterminer les extremums «spatiaux» de la courbe, c'est-à-dire par exemple la plus grande abscisse atteinte; d'autre part, on détermine ainsi des intervalles où f et g sont monotones, et le point représentatif $P(t)$ se déplace alors de $P(t_1)$ à $P(t_2)$ de manière assez simple, donc facile à esquisser en première approximation.

2.2 Étude locale.

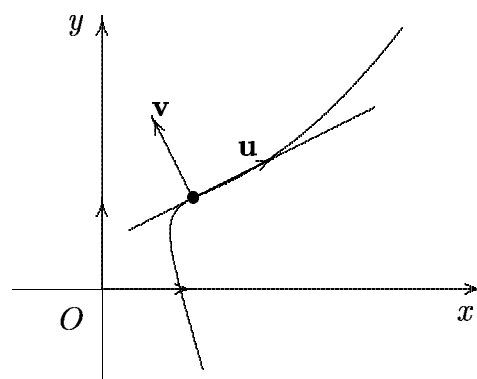
Définissant la dérivée (en t_0) d'une « fonction vectorielle », c'est-à-dire de la forme $\vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, comme étant le vecteur $\vec{F}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ (notion qui ne dépend en fait pas du repère, comme on le vérifiera en exercice), on obtient au voisinage de $P_0 = P(t_0)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP}(t) &= \overrightarrow{OP}_0 + (t - t_0)\overrightarrow{OP}'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\overrightarrow{OP}''(t_0) + \dots \\ &\dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!}\overrightarrow{OP}^{(n)}(t_0) + "o((t - t_0)^n)" \end{aligned}$$

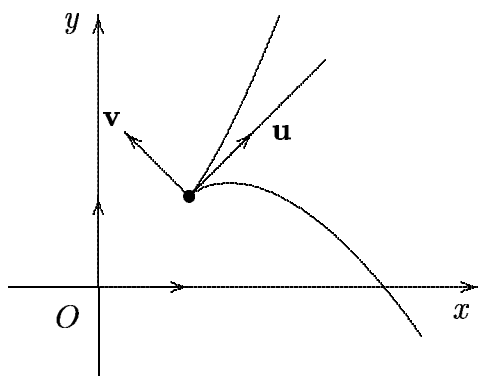
Cette formule permet d'abord de définir le vecteur \mathbf{v} tangent à la courbe (en P_0) comme étant le premier des vecteurs $\overrightarrow{OP}'(t_0), \overrightarrow{OP}''(t_0), \dots$ qui soit non nul (et on pourrait montrer que la (demi)-droite (P_0, \mathbf{v}) est « tangente » à la courbe en un des sens qui ont été esquissés au chapitre 9); pour classer plus précisément les différentes formes possibles, illustrées ci-dessous,



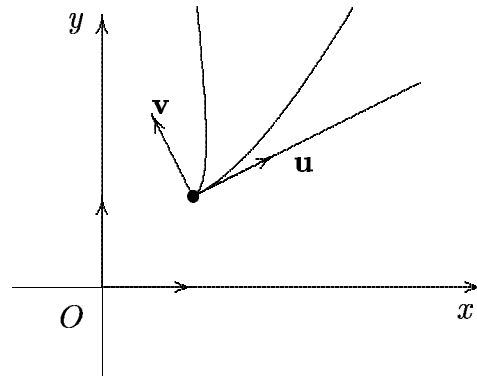
Point « régulier » ($x=1+t+t^2, y=1+t-t^2$)



Point d'inflexion ($x=t+t^2+1, y=1+\frac{t}{2}+t^3$)



Point de rebroussement de première espèce
($x=1+t^2, y=1+t^2+t^3$)



Point de rebroussement de seconde espèce
($x=1+t^2+t^3, y=1+\frac{t^2}{2}+2t^4$)

plaçons-nous dans le repère orthonormé direct $(P_0, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ où \mathbf{u} est un vecteur unitaire obtenu à partir de ce premier vecteur non nul (autrement dit, si $\mathbf{t} = \overrightarrow{OP}^{(k)}(t_0)$ pour le plus petit k tel que $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{t}/\|\mathbf{t}\|$); on obtient alors à des termes négligeables près (le calcul sera fait en classe) $X(t) = a(t-t_0)^k$ et $Y(t) = b(t-t_0)^{k+n}$ (avec $a > 0$ et $b \neq 0$ en général; $k+n$ est le premier indice i pour lequel $\overrightarrow{OP}^{(k)}(t_0)$ et $\overrightarrow{OP}^{(i)}(t_0)$ ne sont pas colinéaires). On en déduit une classification simple à l'aide de la parité de k et $k+n$: un point est dit régulier si $k = 1$, singulier sinon; si k est impair, on a une tangente complète, et le point est « ordinaire » (la tangente reste du même côté de la courbe) si n impair, et point d'inflexion si n est pair; si k est pair, on n'a qu'une demi-tangente, dite tangente de rebroussement, et le point est un point de rebroussement de première

espèce si n est impair (la courbe est «des deux côtés» de la demi-tangente), et c'est un point de rebroussement de seconde espèce si n est pair (la courbe reste «du même côté de la tangente»). Une analyse plus précise encore (amenant à la notion de courbure) sera faite en Spé.

2.3 Branches infinies.

Les définitions des asymptotes et des directions asymptotiques se généralisent aux courbes paramétrées : si (pour t tendant vers a fini ou infini) le point représentatif $P(t)$ «s'éloigne à l'infini» (c'est-à-dire que $\lim_{t \rightarrow a} OP(t) = +\infty$), on dira que la courbe admet une branche infinie; si alors la direction du vecteur $\overrightarrow{OP(t)}$ (c'est-à-dire le vecteur unitaire $\overrightarrow{OP(t)}/\|\overrightarrow{OP(t)}\|$) admet une limite, on dira que cette direction limite est direction asymptotique de la branche infinie; si enfin la parallèle à cette direction limite passant par $P(t)$ admet une position limite (cela revient par exemple à dire que l'intersection de cette droite avec la droite passant par O qui lui est orthogonale tend vers un point), on dira que cette position est asymptote à la branche infinie (on définit de manière analogue la notion de branche parabolique). En pratique, on utilise la même méthode que celle qui a été vue pour les graphes de fonctions : on cherche la limite L (quand t tend vers a) de $y(t)/x(t)$, puis celle de $y(t) - Lx(t)$; toutefois, il y a à présent quelques cas particuliers supplémentaires; ainsi si $\lim y(t)/x(t) = +\infty$, on peut très bien avoir une asymptote parallèle à Oy .

2.4 Points exceptionnels.

Contrairement à ce que pouvait laisser croire l'étude de 2.2, les points singuliers (ceux où $x'(t) = y'(t) = 0$) ne sont pas les seuls à pouvoir présenter un aspect exceptionnel, car cette étude ne tenait compte que des valeurs de t proche d'un t_0 donné. Mais si la fonction $f: t \mapsto P(t)$ n'est pas injective, les restrictions de f à deux intervalles $[a, b]$ voisinage de t_0 et $[c, d]$ voisinage de t_1 tels que $P(t_0) = P(t_1)$ sont deux arcs paramétrés qui se «coupent» en $P(t_0)$: un tel point s'appelle un point multiple (double dans le cas envisagé) et son étude pratique se fait en se restreignant à des intervalles bien choisis. La recherche des points multiples, passant par la résolution de l'équation $P(t) = P(t')$ (en pratique, du système $(x(t) = x(t'); y(t) = y(t'))$) est souvent difficile; on pensera d'abord à mettre $(t - t')$ en facteur!

2.5 Courbes définies «en polaire».

L'étude des fonctions «en coordonnées polaires» $\rho = f(\theta)$ peut se ramener à celles de courbes paramétrées; en effet, il suffit de poser $x = f(\theta) \cos \theta$ et $y = f(\theta) \sin \theta$. Toutefois, ce genre de fonction apparaît souvent de façon «naturelle» (en Physique par exemple), et on désire alors obtenir des informations géométriques sans passer par cette conversion. Les symétries naturelles sont à présent liées aux transformations $\theta \rightarrow -\theta$ et $\theta \rightarrow \theta + \pi$, et d'autre part on étudie souvent ainsi des fonctions périodiques de période α , dont le graphe se reproduit par rotation d'angle α , comme on le verra en classe.

Les calculs «différentiels» s'énoncent plus simplement dans le langage de l'analyse vectorielle qui sera vu en Spé; on retiendra surtout le calcul du vecteur tangent : posant $\mathbf{u}(\theta)$ le vecteur unitaire d'angle polaire θ , on a $\overrightarrow{OM} = \rho \mathbf{u}(\theta) = f(\theta) \mathbf{u}(\theta)$, et donc $\overrightarrow{OM}'(\theta) = f'(\theta) \mathbf{u} + f(\theta) \mathbf{v}$, où $\mathbf{v} = \mathbf{u}'(\theta)$ est le vecteur (unitaire) d'angle polaire $\theta + \pi/2$.

L'étude des branches infinies est un peu modifiée par rapport au cas cartésien ; tout d'abord, avoir $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) = +\infty$ ne donne plus une asymptote, mais seulement la direction asymptotique $\mathbf{u}(\theta_0)$ (il faut étudier ensuite la limite de la distance (algébrique) à la droite $(O, \mathbf{u}(\theta_0))$, qu'on voit aisément être égale à $\rho \sin(\theta - \theta_0)$); d'autre part, il apparaît (quand θ tend vers l'infini) un nouveau type de branche infinie : les *spirales*; en effet, le rayon vecteur tourne indéfiniment autour de O ; si alors $\lim \rho = \infty$, on a une branche spirale (s'éloignant à l'infini); si $\lim \rho = 0$, l'origine est un point asymptote (autour duquel la courbe spirale indéfiniment); enfin, si $\lim \rho = a \neq 0$, le cercle $\rho = |a|$ est un cercle asymptote.

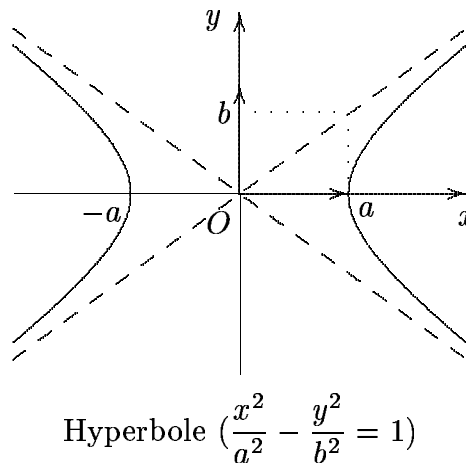
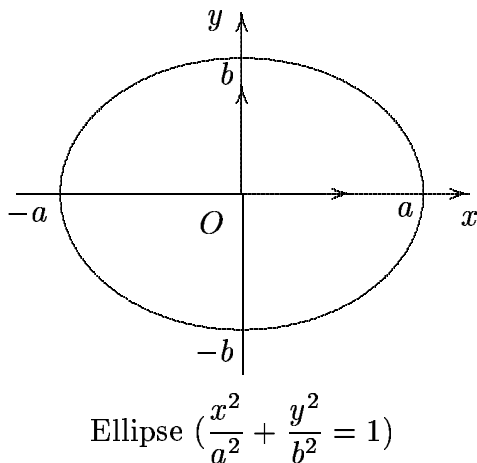
3 Coniques.

3.1 Définitions algébriques.

On appelle *conique* (d'un plan repéré par (O, \vec{i}, \vec{j})) tout ensemble de points vérifiant une équation (cartésienne) de la forme $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (où A, B , etc. . . sont des constantes (réelles), et où A, B et C ne sont pas tous trois nuls). La théorie «algébrique» sera faite en Spé, et on verra plus loin en exercice la justification historique de ce nom (les ensembles obtenus sont des intersections d'un cône par un plan). On démontrera en Spé qu'on peut toujours choisir un repère (orthonormal) où $C = 0$ (on dit qu'on a éliminé le «terme rectangle»); nous ne nous placerons plus que dans ce cas; d'autre part, les différents cas particuliers («pas de solution» comme pour $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$ (la conique est vide) ou une solution formée d'un point $((x - 1)^2 + y^2 = 0)$ ou de droites $(x^2 - y^2 = 0)$, etc. . .) sont appelés des coniques *dégénérées* (ou impropres), et nous ne les étudierons pas ici (ce n'est qu'un exercice fastidieux de discussion cas par cas).

3.2 Équations canoniques.

Par une technique analogue à la mise sous forme canonique d'un trinôme (et qu'on détaillera en exercice), on peut se ramener à la forme $A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + K = 0$ si A et B ne sont pas nuls; et (en échangeant au besoin les rôles de x et y) à la forme $A(x - x_0)^2 + Ey + K = 0$ si B est nul. Les coniques du second type s'appellent, comme on le sait, des *paraboles* (d'axe parallèle à Oy); on va étudier celles du premier type en prenant pour nouvelle origine $C_0 : (x_0, y_0)$, qu'on appelle *centre* de la conique. Dans le nouveau repère, on aboutit (après division par K) à la forme (dite canonique) $X^2/a^2 \pm Y^2/b^2 = 1$ (en échangeant au besoin les rôles de X et Y); les coniques du type $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$ sont appelées des *ellipses*, et celles du type $X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1$ des *hyperboles*. Une analyse élémentaire des équations montre alors que l'ellipse ainsi définie coupe l'axe des X en a et $-a$, et l'axe des Y en b et $-b$; prenant conventionnellement $0 < b \leq a$ (ce qui est toujours possible après un dernier échange éventuel de X et Y), on appelle a le demi grand axe et b le demi petit axe; on vérifie aisément que l'affinité $Y \rightarrow (a/b)Y$ transforme l'ellipse en un cercle (de centre C_0 et de rayon a), ce qui fournit une construction géométrique (point par point) élémentaire. De même, l'hyperbole qu'on vient de définir coupe l'axe des X en a et $-a$ (et ne coupe pas l'axe des Y); remarquant qu'on peut écrire $Y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{X^2 + a^2}$, et étudiant le graphe de la fonction correspondante, on voit que l'hyperbole possède deux asymptotes d'équations $Y = \pm \frac{b}{a} X$ (et donc de pente $\pm b/a$); un tracé approximatif rapide s'en déduit (mais il n'y a pas de construction exacte aussi simple que pour l'ellipse)



3.3 Propriétés géométriques.

Cherchons à déterminer le « lieu géométrique » des points M tels que $MF + MF' = 2a$ (où F et F' sont deux points fixes, et a une constante ($FF' < 2a$)). Le calcul de l'équation cartésienne de cet ensemble n'est pas très difficile; en prenant pour origine le milieu de $[FF']$ (et (FF') comme axe des x), on obtient (en, posant $OF = c$) $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, ce qui montre que cet ensemble est une ellipse (de demi petit axe $b = \sqrt{a^2 - c^2}$). Les points F et F' s'appellent les *foyers* de l'ellipse, et le nombre $e = c/a$ est son *excentricité*. De même, la relation $|MF - MF'| = 2a$ (où cette fois on doit avoir $2a < FF'$) aboutit (avec les mêmes notations) à l'hyperbole $(a^2 + c^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(a^2 + c^2)$ (et donc $b = \sqrt{a^2 + c^2}$); on appelle encore $e = c/a$ l'excentricité (> 1 dans ce cas).

Il n'y a pas exactement d'analogue pour la parabole, mais l'étude du problème similaire $MF = d(M, \Delta)$ aboutit (en prenant pour origine le milieu du segment FH projetant F sur Δ , et pour axe Oy la droite (OH)) à l'équation $y = x^2/2p$ (où p est l'ordonnée de F); on dit encore que F est le foyer de la parabole, et Δ s'appelle la *directrice*.

Généralisant alors au problème $MF = k d(M, \Delta)$, on montre (cela sera fait en TD) qu'on obtient une ellipse (d'excentricité k) si $k < 1$ et une hyperbole (d'excentricité k) si $k > 1$ (le cercle est la seule conique pour laquelle aucune description de ce type n'existe); il y a cette fois une autre possibilité (liée à F'), et on dira donc que la conique possède deux directrices; on verra en TD comment les déterminer à partir de l'équation de la conique par exemple.

Cette caractérisation des coniques permet d'ailleurs d'obtenir aisément leur équation en coordonnées polaires : prenant le foyer F comme origine, et la directrice Δ orthogonale à l'axe (Fx) , on voit aisément que

$$MF = k d(M, \Delta) \iff \rho = \frac{a}{1 + k \cos \theta}.$$

Les propriétés purement géométriques des coniques ont été un sujet de prédilection pour les géomètres depuis l'antiquité (mais leur utilisation pratique par Kepler est apparue comme une immense surprise); la plupart sont extrêmement difficiles à obtenir sans passer par des arguments de géométrie dans l'espace (qu'on appelle les méthodes projectives).

4 Surfaces.

4.1 Fonctions à deux variables.

Soit f une fonction «à deux variables», c'est-à-dire une application de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} (par abus de langage, on notera $f(x, y)$ l'image du couple (x, y)). L'ensemble des triplets de \mathbf{R}^3 de la forme $(x, y, f(x, y))$ (le graphe de f au sens du chapitre 6) est représenté par l'ensemble des points de \mathcal{E} ayant ces coordonnées (dans ce contexte, z s'appelle la *cote* du point $M(x, y, z)$ d'abscisse x et d'ordonnée y); si f est assez régulière (on donnera un sens précis à cela en Spé), cet ensemble de points est une surface, appelée surface représentative de f (et parfois notée \mathcal{S}_f). Il n'est possible de décrire ainsi que les surfaces n'ayant qu'un point sur chaque verticale, mais on pourra en général obtenir d'autres surfaces usuelles comme réunion de plusieurs graphes.

On peut déjà obtenir des résultats intéressants à l'aide des méthodes de l'analyse à une variable, car la restriction de f aux couples de la forme (a, y) par exemple est une fonction ordinaire, que l'on appelle souvent une fonction partielle (et qu'on note par exemple $f_y(a)$, ou plus précisément $f_y(a, \cdot)$); comme on le voit, le graphe de cette fonction est l'intersection de la surface représentative de f et du plan (vertical) $[X = a]$.

D'autre part, l'intersection de \mathcal{S}_f et du plan $z = c$ est une courbe (appelée *ligne de niveau c de f*), d'équation cartésienne (dans ce plan) $f(x, y) = c$, ce qui permet un lien entre la théorie des fonctions à deux variables et l'étude géométrique de ces courbes. On peut par exemple déduire la position de leurs tangentes de celle du plan tangent à la surface \mathcal{S}_f , qui sera déterminé en Spé à l'aide de la «différentielle (totale) de f »; on verra aussi en Spé comment s'interprète ainsi la notion de col, et pourquoi les lignes de niveau y présentent un point double.

4.2 Nappes paramétrées.

On a dit que (pour des fonctions suffisamment régulières), l'ensemble des points images de \mathbf{R}^2 de la forme $P(u, v)$ est une surface, dont (dans un repère donné) les relations

$$(S) \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

constituent un système d'équations paramétriques. Si on fixe un des paramètres, l'ensemble des points $P(u, v_0)$ (par exemple) est donc une courbe paramétrée (non plane en général) contenue dans la surface, et la famille de ces courbes (quand v_0 varie) décrit la surface. Quand ces courbes sont des droites, on dit que la surface est *réglée*; on verra en TD comment montrer qu'il en est ainsi de l'hyperboloïde $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, par exemple.

4.3 Sphères, cylindres et cônes.

On a vu que la surface d'équation (cartésienne) $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z - c)^2 = R^2$ est une sphère (de centre $C(a, b, c)$ et de rayon R), et comment utiliser la forme canonique pour montrer réciproquement que $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ est une sphère (quand $A^2 + B^2 + C^2 > 4D$). L'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle si elle est non vide, c'est-à-dire si la distance du centre au plan est inférieure au rayon. Les systèmes de coordonnées sphériques fournissent des équations paramétriques de la sphère, comme on l'a vu plus haut, dont les courbes obtenues par restriction (φ ou θ

constant) s'appellent (respectivement) les *parallèles* et les *méridiens* de la sphère (par rapport à ce repère).

On appelle *cylindre* de direction (δ) et de support (ou de « base ») \mathcal{C} la réunion des droites parallèles à (δ) contenant un point de la courbe \mathcal{C} (qui ne doit pas être contenue dans un plan parallèle à (δ)); les cylindres « usuels » (encore appelés cylindres droits à base circulaire) correspondent au cas où \mathcal{C} est un cercle, et où (δ) est orthogonale au plan de ce cercle; la parallèle à (δ) passant par le centre du cercle s'appelle alors l'axe du cylindre, et on montre aisément que le cylindre est l'ensemble des points (de l'espace) situés à une distance donnée (appelée rayon du cylindre) de l'axe (ce qui permet d'en obtenir l'équation cartésienne). Un raisonnement élémentaire sur les projections (qui sera fait en classe) montre que l'intersection d'un cylindre à base circulaire et d'un plan est une ellipse.

On appelle cône de base \mathcal{C} et de sommet S la réunion des droites passant par S et par un point de la courbe \mathcal{C} (en pratique, on élimine les cas « dégénérés » où le point S appartiendrait à un plan contenant \mathcal{C} , par exemple); il s'agit donc encore d'une surface réglée. La mise en équation du paramétrage correspondant n'est pas très difficile (et sera faite en classe). Les cônes « usuels », correspondant au cas où \mathcal{C} est un cercle, et S appartient à l'axe de ce cercle (c'est-à-dire que la projection orthogonale de S sur le plan du cercle est son centre) s'appellent des cônes circulaires; on établira en classe leur équation cartésienne $(x^2 + y^2 = az^2)$ et on verra en TD l'élégante démonstration (due à Apollonius) de ce que les sections d'un cône circulaire par un plan sont des coniques (d'où leur nom).

23. COURBES ET SURFACES

Plan

1	Systèmes de coordonnées.	p. 1
1.1	Définitions générales.	
1.2	Représentations paramétriques et implicites.	
1.3	Coordonnées polaires.	
1.4	Coordonnées cylindriques et sphériques.	
2	Courbes paramétrées planes.	p. 3
2.1	Étude globale et symétries.	
2.2	Étude locale.	
2.3	Branches infinies.	
2.4	Points exceptionnels.	
2.5	Courbes définies «en polaire».	
3	Coniques.	p. 6
3.1	Définitions algébriques.	
3.2	Équations canoniques.	
3.3	Propriétés géométriques.	
4	Surfaces.	p. 8
4.1	Fonctions à deux variables.	
4.2	Nappes paramétrées.	
4.3	Sphères, cylindres et cônes.	