Le lemme «qui n'est pas de Burnside»

Le but de cette note est de démontrer un résultat attribué, selon les auteurs, à Burnside, Polyà, Cauchy, Frobenius, etc., et dont la principale application pratique est de faciliter les dénombrements d'objets géométriques, comme on le verra à la fin. Rappelons d'abord quelques définitions : on dit qu'un groupe G opère sur E si on a une opération externe «$\cdot$», allant de $G \times E$ vers E, telle que $(gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$ et que $e_G \cdot x = x$ (pour tout x de E et tout g et h de G) ; c'est en particulier le cas si G est un sous-groupe du groupe des bijections de E dans E, avec $g\cdot x = g(x)$; on dit alors aussi que G est un groupe de transformations de E, et nous ne nous placerons plus que dans ce cas (auquel on peut se ramener par un isomorphisme canonique évident) ; si $g \in G$ et $g(x) = x$, on dit que x est un point fixe de g, et enfin on appelle orbite (pour G) une classe d'équivalence pour la relation (dans E) $x \sim y \iff \exists g \in G,\ g(x) = y$. Le lemme de Burnside dit alors que le nombre d'orbites est la moyenne du nombre des points fixes des éléments de G, ou, de manière plus rigoureuse :

Lemme de Burnside. *Si G opère sur E, qu'on note E/G l'ensemble des orbites, et F_g l'ensemble des points fixes de g, on a* $\mathrm{Card}(E/G)\mathrm{Card}(G) = \sum_{g\in G} \mathrm{Card}(F_g)$.

Pour démontrer le lemme, nous allons construire une bijection entre $(E/G)\times G$ et $F = \{(x,g) \in E\times G \mid g(x) = x\}$. La clé de cette construction est la remarque banale selon laquelle, si $f(x) = g(x) = y$ (x et y étant alors dans la même orbite), on a $gf^{-1}(y) = y$, donc y est un point fixe de gf^{-1}. Commençons par choisir un représentant $x_C \in E$ dans chaque orbite $C \in E/G$ (ce qui demande l'axiome du choix si E est infini), et pour chaque $y \in C$, choisissons un $g_y \in G$ tel que $g_y(x_C) = y$. Alors, si $(C,f) \in (E/G)\times G$, on a par définition $g_{f(x_C)}(x_c) = f(x_C)$, donc $y = f(x_C)$ est un point fixe de $h = g_{f(x_C)}f^{-1}$; posons $\varphi((C,f)) = (y,h)$. φ est évidemment une application de $(E/G)\times G$ vers F ; pour montrer que φ est une bijection, il suffit de remarquer que $\varphi((C,f)) = \varphi((C',f')) = (y,h)$ implique trivialement que C est la classe de y, donc que $C = C'$, et que $g_{f(x_C)}f^{-1} = g_{f(x_C)}f'^{-1}$, donc que $f = f'$, ce qui prouve que φ est injective, et que si $h \in G$ et que $h(y) = y$, appelant C_y l'orbite de y, $\varphi((C_y, h^{-1}g_y)) = (y,h)$, ce qui montre que φ est surjective. Comme (par définition du produit des cardinaux) $\mathrm{Card}((E/G)\times G) = \mathrm{Card}(E/G)\mathrm{Card}(G)$ et que $F = \bigcup_{g\in G} F_g \times \{g\}$, le lemme résulte de la définition de la somme des cardinaux (même dans le cas infini).

Montrons par exemple comment utiliser le lemme de Burnside pour déterminer le nombre des coloriages possibles des sommets d'un carré avec n couleurs distinctes, deux coloriages étant identiques s'il existe une isométrie du carré envoyant l'un sur l'autre. Un coloriage est donc une classe d'équivalence dans l'ensemble E des applications des quatre sommets du carré $\{A,B,C,D\}$ vers l'ensemble des n couleurs $\{1,2,\dots,n\}$ ($E = \{1,2,\dots,n\}^{\{A,B,C,D\}}$), pour la relation d'équivalence $f \sim g \iff \exists s, s \text{ isométrie}, g(S) = f(s(S))$ pour tout $S \in \{A,B,C,D\}$. On voit aisément que cela revient à étudier les orbites de l'ensemble E sous l'action du sous-groupe G des isométries laissant le carré invariant (en notant $s\cdot f = g$, ou plus simplement $s(f) = g$, la fonction g définie par $g(X) = f(s(X))$ pour tout $X \in \{A,B,C,D\}$). Or G est formé de 8 isométries (l'identité, les trois rotations de $k\pi/2$, et les quatre symétries par rapport aux axes du carré) ; le lemme de Burnside amène donc à chercher les points fixes de E pour chacune de ces isométries, on vérifie aisément qu'il y en a n^4 pour l'identité, n^2 pour la symétrie centrale et pour les symétries non diagonales, n^3 pour les symétries diagonales, et n pour les rotations, d'où le nombre de coloriages cherché :

$$x = \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{8} = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}.$$