

Familles de \mathbf{R}^n **Énoncé.**

Soit $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbf{R}^n , $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille définie par :

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^i \mathbf{e}_k \quad (\text{pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket).$$

Montrer que \mathcal{F} est une base, et déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Méthode.

- 1 Bien sûr, il est nécessaire de connaître **précisément** la définition du mot « coordonnée » ; on se méfiera en particulier des confusions entre les x_i (les coordonnées « canoniques ») et les coordonnées dans une base quelconque.
- 2 Ne pas hésiter, au brouillon, à « concrétiser » l'énoncé : prenant $n = 4$, on obtient la famille $\mathcal{F} = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$, et la recherche des coordonnées du vecteur (a, b, c, d) revient à résoudre le système (« triangulaire ») $x = a$, $x + y = b$, $x + y + z = c$ et $x + y + z + t = d$.
- 3 D'après le théorème de la dimension, la famille ayant le « bon nombre » de vecteurs, il suffit de montrer que \mathcal{F} est libre. Une récurrence « triviale » devrait suffire ; on vérifiera en effet aisément que, si $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, le coefficient de \mathbf{e}_k vaut α_k .
- 4 De même, on peut résoudre par récurrence le système général, en remarquant que les équations produisent α_k à partir des α_i pour $i < k$, et en « parachutant » la solution.
- 5 Cependant, la rédaction demande beaucoup de soin, si on veut vraiment se montrer rigoureux ; c'est une bonne occasion de revoir les méthodes de raisonnement par récurrence finie (chapitre 5, et fiche n° 17)

Solution.

- 1 Montrons d'abord que \mathcal{F} est une famille libre. Raisonnons par récurrence limitée à n , en montrant que pour tout $k \leq n$, la famille $\mathcal{F}_k = (\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq k}$ est libre. C'est évident pour $k = 1$; supposons que la famille \mathcal{F}_m (avec $m < n$) soit libre, et considérons une combinaison linéaire nulle de la famille \mathcal{F}_{m+1} , soit $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$; on aura donc $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i (\sum_{j=1}^i \mathbf{e}_j) = \mathbf{0}$, et en particulier, le coefficient de \mathbf{e}_{m+1} dans cette somme sera nul, puisque $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq m+1}$ est libre. Or ce coefficient est α_{m+1} (puisque la $(m+1)^{\text{ème}}$ coordonnée de \mathbf{v}_k est nulle pour $k \leq m$) ; on a donc montré que $\alpha_{m+1} = 0$, et donc que $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$; d'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, et comme $\alpha_{m+1} = 0$, la combinaison linéaire

envisagée est à coefficients tous nuls, ce qui montre que la famille \mathcal{F}_{m+1} est libre. Par récurrence (limitée à n), on voit donc que \mathcal{F}_n est libre, et d'après le théorème de la dimension, puisque c'est une famille libre de n vecteurs, et que $\dim(\mathbf{R}^n) = n$, c'est une base. Calculons les coordonnées du vecteur $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans cette

base : posons $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^i \mathbf{e}_j$, on en déduit que les α_i doivent vérifier

le système d'équations $(E_p) \sum_{i=p}^n \alpha_i = x_p$ (pour $1 \leq p \leq n$); or, soustrayant les deux équations consécutives (E_p) et (E_{p+1}) , on obtient $\alpha_p = x_{p+1} - x_p$ si $1 \leq p < n$, et $\alpha_n = x_n$; comme on sait que les coordonnées existent (et sont uniques), la famille \mathcal{F}_n étant une base, ces valeurs doivent convenir.

Remarques.

- 1 *La lourdeur de la rédaction est (malheureusement) inévitable si on veut se montrer parfaitement rigoureux; cependant, l'argument essentiel est le calcul du coefficient de \mathbf{e}_{m+1} (qu'on peut d'ailleurs obtenir directement par une manipulation de sommes doubles) et il est souvent considéré comme acceptable de se contenter d'esquisser la récurrence, puis d'expliquer pourquoi on peut se ramener de \mathcal{F}_{m+1} à \mathcal{F}_m .*
- 2 *En fait, l'exercice se généralise sans difficulté à un espace vectoriel quelconque de dimension finie n , en prenant une base $(\mathbf{b}_i)_{1 \leq i \leq n}$ et la famille définie par $(\sum_{i=0}^k \mathbf{b}_i)_{1 \leq k \leq n}$; le fait qu'on obtienne exactement les mêmes formules résulte de l'isomorphisme induit par $f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$ (voir le chapitre 18).*
- 3 *Plus généralement encore, si (pour tout k) $a_k \neq 0$, la famille $\mathcal{F}_p = (\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq p \leq n}$ définie par $\mathbf{v}_k = a_k \mathbf{b}_k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \mathbf{b}_i$ (où les c_i sont des constantes quelconques) est libre; et pour $p = n$, c'est une base (mais bien sûr, les formules de calcul de coordonnées n'ont plus guère d'intérêt dans ce cas); ce résultat est généralement surtout exploité dans le cadre de familles de polynômes, sous la forme suivante : si $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une famille de polynômes (de $\mathbf{R}[X]$, par exemple) telle que (pour tout i) $\deg(P_i) = i$, c'est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ (il est vivement conseillé de savoir le redémontrer dans chaque cas particulier).*

Familles libres dans un espace de fonctions

Énoncé.

Soit $\mathcal{F} = (f_k)_{1 \leq k \leq n}$ la famille des applications définies par $f_k : x \mapsto \cos kx$. Montrer que c'est une famille libre (de l'espace des applications de \mathbf{R} dans \mathbf{R}) :

- a) en dérivant deux fois une combinaison linéaire nulle des f_k , en éliminant alors le dernier terme, et en raisonnant par récurrence;
- b) en exprimant une telle combinaison comme la partie réelle d'un polynôme en $z = e^{ix}$, et en remarquant que ce polynôme vérifie $P(z) + P(1/z) = 0$ pour tout z de module 1.

Méthode.

- 1 Pour ce type d'exercice, il faut être précis : on doit partir d'une combinaison linéaire $f = \sum a_k f_k$ dont on sait que $f = 0_E$, et en déduire que $a_k = 0$ pour tout k . Si un raisonnement par récurrence doit s'y combiner, l'enchevêtrement des quantificateurs peut devenir redoutable...
- 2 Les indications données par l'énoncé sont (volontairement?) fort imprécises; cela correspond davantage à un sujet d'oral (à «astuce») qu'à un écrit, où le candidat serait trop bloqué s'il ne voyait pas par où commencer. Inversement, ce type de sujet étant fort classique, on peut même se le voir proposer sans indications, l'examineur se réservant de ne les fournir qu'après avoir vu vos idées de méthode.
- 3 La première méthode amène à étudier $f'' - n^2 f$, pour éliminer le terme $a_n \cos nx$; mais ceci n'éliminant pas les autres termes, il faudra prendre comme hypothèse de récurrence : «la famille $\mathcal{F}_p = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre».
- 4 La seconde méthode est plus «abstraite» : posant (selon une idée très classique) $f = \Re(\sum a_k (\cos kx + i \sin kx))$, le calcul direct aboutit en effet à $P(z) + P(1/z) = 0$ (puisque $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = 1/z$); posant alors $Q(z) = z^n P(z)$, on constate que Q est un polynôme nul pour une infinité de valeurs, donc toujours nul. Il ne reste plus qu'à remarquer que cela implique $a_n = 0$...

Solution.

- a) Montrons par récurrence (sur n) que la famille $\mathcal{F}_n = (f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre : c'est évident pour $n = 1$, puisque l'application $f_1 : x \mapsto \cos x$ n'est pas l'application nulle ($f_1(0) = 1$); supposons que cela soit vrai pour p fixé, et montrons que $\sum_{k=1}^{p+1} a_k f_k = \tilde{0}$ (l'application nulle) implique $\forall k \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket, a_k = 0$. Soit en effet une suite de coefficients $(a_k)_{1 \leq k \leq p+1}$ telle que $f = \sum_{k=1}^{p+1} a_k f_k = \tilde{0}$, on a donc, pour tout x de \mathbf{R} , $\sum_{k=1}^{p+1} a_k \cos kx = 0$. Dérivant deux fois cette égalité,

on obtient $(\forall x \in \mathbf{R}) f''(x) = \sum_{k=1}^{p+1} a_k(-k^2 \cos kx) = 0$, et donc

$$\begin{aligned} f''(x) + (p+1)^2 f(x) &= \sum_{k=1}^{p+1} a_k((p+1)^2 - k^2 \cos kx) \\ &= \sum_{k=1}^p a_k((p+1)^2 - k^2 \cos kx) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f'' + (p+1)^2 f = \sum_{k=1}^p a_k((p+1)^2 - k^2) f_k = \tilde{0}$. Or ceci est une combinaison linéaire de la famille \mathcal{F}_p , et d'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $a_k((p+1)^2 - k^2) = 0$, donc $a_k = 0$. On en déduit donc que $f = a_{p+1} f_{p+1}$, et, la fonction f_{p+1} n'étant pas nulle, que $a_{p+1} = 0$. Les coefficients a_k sont donc tous nuls, ce qui prouve que \mathcal{F}_{p+1} est libre, et, par récurrence, que \mathcal{F}_n est libre pour tout n .

- b) Soit, comme précédemment, $f = \sum a_k f_k$ une combinaison linéaire nulle de la famille \mathcal{F} ; si tous les a_k ne sont pas nuls, appelons a_p le coefficient non nul de plus grand indice; on a donc $f = \sum_{k=1}^p a_k f_k$. Posons $g(x) = \sum_{k=1}^p a_k(\cos kx + i \sin kx)$, d'après Moivre, on aura donc $g(x) = \sum_{k=1}^p a_k e^{ikx}$, et posant $z = e^{ix}$, $g(x) = \sum_{k=1}^p a_k z^k$. Comme $f = \tilde{0}$, $g(x) \in i\mathbf{R}$, et donc pour tout z de module 1, le polynôme $P(z) = \sum_{k=1}^p a_k z^k$ vérifie $\overline{P(z)} = -P(z)$, et on sait que, puisque $P \in \mathbf{R}[X]$, $\overline{P(z)} = P(\bar{z}) = P(1/z)$. Posons alors $Q(z) = z^p(P(z) + P(1/z))$. Q est un polynôme, et $Q(z) = 0$ pour tout z tel que $|z| = 1$; Q a donc une infinité de racines, ce qui n'est possible (d'après d'Alembert) que si Q est le polynôme nul. Or $Q(z) = \sum_{k=1}^p a_k(z^{p+k} + z^{p-k})$, dont le terme de plus haut degré est $a_p z^{2p}$, et donc $a_p = 0$, ce qui est absurde d'après les hypothèses faites. Ainsi, tous les a_k sont nuls, et la famille \mathcal{F} est libre.

Remarques.

- 1 Comme on le voit, et bien que le résultat soit intuitivement évident, ce type de démonstration d'«indépendance linéaire» n'a rien de facile en général. Cela dit, des arguments plus simples sont souvent possibles. Ainsi, la famille des e^{kx} est libre, car il suffit de poser $X = e^x$ pour se ramener à un polynôme (sur \mathbf{R}^+ , mais on sait que c'est suffisant, en utilisant l'argument classique des méthodes d'identification); la famille des $e^{a_i x}$ ($a_1 < a_2 < \dots < a_n$) est libre, en raisonnant par récurrence, et en remarquant qu'en $+\infty$, le terme dominant de la combinaison linéaire est $c_n e^{a_n x}$, ce qui prouve que $c_n = 0$.
- 2 Les raisonnements «élémentaires» possibles dans \mathbf{R}^n ne se généralisent pas aux «espaces fonctionnels», car ils sont de dimension infinie. En revanche, et précisément pour cette raison, on ne rencontre jamais de familles génératrices dans ce cas, et la plupart des familles sont libres.
- 3 Inversement, il suffit, pour montrer qu'une famille est liée, de trouver une relation de dépendance linéaire; on pensera alors aux «formules» (telles que les formules de linéarisation, justement) qui donnent la plupart des relations existantes de ce type.

**Sous-espaces supplémentaires :
méthodes de construction**

Énoncé.

Soit S_1 l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P(1) = P'(1) = P''(1)$, et S_2 l'ensemble des polynômes de la forme $aX^2 + bX^3$. Montrer que S_1 et S_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}[X]$.

Méthode.

- 1 *Ici encore, les définitions exactes sont nécessaires, mais le piège principal serait de n'avoir retenu que la «formule de la dimension» : outre qu'elle n'est pas toujours évidente à utiliser, elle n'est valable qu'en dimension finie !*
- 2 *Il est assez évident de montrer que S_2 est un sous-e.v. (c'est $\text{Vect}(X^2, X^3)$), mais il vaut mieux revenir à la définition pour S_1 , la seule autre piste étant d'exprimer S_1 comme noyau d'une application linéaire, nullement évidente ici.*
- 3 *Un calcul direct montre que le seul polynôme de S_2 vérifiant les conditions de S_1 est le polynôme nul; la somme est donc directe.*
- 4 *Mais montrer que $S_1 \oplus S_2 = \mathbf{R}[X]$ semble impossible directement; on va donc «supposer le problème résolu» : partant d'un polynôme P quelconque, on pose $P = P_1 + aX^2 + bX^3$ (avec $P_1 \in S_1$), et on détermine a et b en exprimant $P'(1)$ et $P''(1)$, et en éliminant entre les équations obtenues, puis on contrôlera que le polynôme P_1 ainsi trouvé convient bien.*
- 5 *Et dans la rédaction finale, on pourrait se contenter d'«exhiber» la solution; mais cette présentation étant trop désagréablement artificielle, on lui préférera une version plus «scolaire», montrant comment on a été amené au résultat.*

Solution.

Les polynômes de la forme $aX^2 + bX^3$ sont les combinaisons linéaires de X^2 et X^3 ; c'est-à-dire que S_2 défini par $S_2 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \exists(a, b) \in \mathbf{R}^2, P(X) = aX^2 + bX^3\}$ vérifie $S_2 = \text{Vect}(X^2, X^3)$ (et S_2 est donc un plan vectoriel). Montrons que S_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$: il n'est pas vide (puisque'il contient le polynôme nul); si P et Q appartiennent à S_1 , on a $(P + \lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) = P'(1) + \lambda Q'(1) = P''(1) + \lambda Q''(1) = (P + \lambda Q)'(1) = (P + \lambda Q)''(1)$, ce qui prouve que $(P + \lambda Q) \in S_1$, ce qui est la condition de stabilité caractéristique des sous-espaces. Déterminons à présent $S_1 \cap S_2$: si $P = aX^2 + bX^3 \in S_1$, cela veut dire que $P(1) = P'(1) = P''(1)$, or $P(1) = a + b$, $P'(1) = 2a + 3b$ et $P''(1) = 2a + 6b$; la seconde égalité donne donc $3b = 6b \Rightarrow b = 0$, et la première implique $a = 2a \Rightarrow a = 0$; en définitive, P est donc le polynôme nul $\tilde{0}$, et $S_1 \cap S_2 = \{\tilde{0}\}$. La somme de S_1 et S_2 est donc directe; il ne reste plus qu'à montrer que $S_1 \oplus S_2 = \mathbf{R}[X]$. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ fixé (quelconque), si on peut écrire $P = P_1 + aX^2 + bX^3$ (avec $P_1 \in S_1$), on aura $P(1) = P_1(1) + a + b$, $P'(1) = P_1'(1) + 2a + 3b$ et $P''(1) = P_1''(1) + 2a + 6b$; comme on doit avoir $P_1(1) = P_1'(1) = P_1''(1)$, on en déduit

(en soustrayant les équations deux à deux) $a + 2b = P'(1) - P(1)$ et $3b = P''(1) - P'(1)$; on obtient donc la seule valeur possible de a , b , et donc de P_1 :

$$P_1(X) = P(X) + \frac{P'(1) - P''(1)}{3}X^3 + \frac{3P(1) - 5P'(1) + 2P''(1)}{3}X^2$$

(ce résultat d'unicité étant prévisible, puisque $S_1 \cap S_2 = \{\tilde{0}\}$). Comme (par construction, de manière évidente), on a $P = P_1 + aX^2 + bX^3$, il suffit donc de vérifier que $P_1 \in S_1$ (ce que les calculs précédents rendent en fait presque évident) :

$$\begin{aligned} P_1(1) &= P(1) + \frac{P'(1) - P''(1)}{3} + \frac{3P(1) - 5P'(1) + 2P''(1)}{3} \\ &= \frac{6P(1) - 4P'(1) + P''(1)}{3}, \\ P_1'(1) &= P'(1) + P'(1) - P''(1) + \frac{6P(1) - 10P'(1) + 4P''(1)}{3} \\ &= \frac{6P(1) - 4P'(1) + P''(1)}{3} \text{ et} \\ P_1''(1) &= P''(1) + 2P'(1) - 2P''(1) + \frac{6P(1) - 10P'(1) + 4P''(1)}{3} \\ &= \frac{6P(1) - 4P'(1) + P''(1)}{3}; \end{aligned}$$

et donc $P_1(1) = P_1'(1) = P_1''(1)$, ce qui achève la démonstration.

Remarques.

- 1 «Supposer le problème résolu» est une méthode qui consiste en fait à analyser les propriétés d'une solution éventuelle, ce qui la rapproche d'une tentative de démonstration par l'absurde; mais on cherche plutôt ici à limiter suffisamment l'ensemble des solutions pour qu'il soit possible par inspection directe de voir si ce qui reste convient. On en verra d'autres exemples en Géométrie (dans les problèmes dits de «constructions géométriques»); on est souvent amené aussi à «transformer» la solution; par exemple, si on veut montrer que les applications paires et impaires forment deux sous-espaces supplémentaires de l'espace des applications, on écrira $f = p + i$, donc $\forall x, f(x) = p(x) + i(x) \Rightarrow f(-x) = p(x) - i(x)$, d'où on déduira p et i ($p(x) = (f(x) + f(-x))/2$, $i(x) = (f(x) - f(-x))/2$), et il ne restera plus qu'à montrer que cette solution convient.
- 2 Contrairement à ce que peuvent laisser croire de tels énoncés, il n'est nullement évident que la «solution» obtenue convienne toujours: si on avait utilisé $S_1' = \{P \mid P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1)\}$, on aurait obtenu le même polynôme P_1 , mais il n'est pas dans S_1' en général, puisque $S_1' \subset S_1$ et $S_1' \neq S_1$. Cela dit, dans ce cas, les espaces ne seraient pas supplémentaires, et l'énoncé serait erroné...
- 3 Si on était en dimension finie, le calcul des dimensions de S_1 et S_2 (et le fait que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$) suffirait: on aurait en effet $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$; et, en dimension finie, $A \subset B$ et $\dim(A) = \dim(B) \Rightarrow A = B$.
- 4 Et en fait, il existe une théorie analogue en dimension infinie (la théorie de la «codimension»), mais elle est hors-programme en classes prépas; c'est elle qui permet de fabriquer à bon compte des exemples analogues à ceux de l'énoncé: le lecteur curieux pourra essayer de deviner comment on a obtenu, par exemple, le couple $S_1 = \{P \mid P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(2) = P'''(2) = 0\}$, $S_2 = \text{Vect}(X, X^2, X^5, X^{11})$.

Morphismes et transport de structure

Énoncé.

Soit \star la loi de composition définie sur $E =]-1, 1[$ par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que \star est une loi interne sur E , associative. Montrer que l'application $f : x \mapsto \text{th } x$ est un morphisme de $(\mathbf{R}, +)$ vers (E, \star) , et en déduire que (E, \star) est un groupe abélien.

Méthode.

- 1 *Il n'est nullement évident que \star soit interne; c'est le piège dans lequel tombent fréquemment les victimes de l'énoncé (sans autre indication) : «Montrer que (E, \star) est un groupe abélien».*
- 2 *Il faut donc montrer que $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$ entraîne $1 + xy \neq 0$ et $-1 < (x+y)/(1+xy) < 1$. Or $|x| < 1$ et $|y| < 1$, d'où $|xy| < 1$ et donc $xy > -1$; l'encadrement à démontrer est donc équivalent à $-1 - xy < x + y < 1 + xy$, soit $1 + x + y + xy > 0$ et $xy - x - y + 1 > 0$. Or $1 + x + y + xy = (1+x)(1+y)$ et $xy - x - y + 1 = (1-x)(1-y)$. Il ne reste donc plus qu'à obtenir une rédaction «rigoureuse», selon les méthodes de la fiche n° 1.*
- 3 *Le fait que E soit un groupe ne dépend pas seulement de ce que f est un morphisme et $(\mathbf{R}, +)$ un groupe, mais aussi de ce que f est **surjective** ! La solution proposée ici en redonne la démonstration (qu'il est vivement suggéré de connaître).*
- 4 *Bien que l'énoncé ne le demande pas, on pensera à faire remarquer que f est un isomorphisme (de groupes).*

Solution.

- 1 Montrons d'abord que la loi \star est interne, c'est-à-dire que $\forall (x, y) \in E^2, x \star y \in E$. En effet, si $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$, on a donc $|x| < 1$ et $|y| < 1$, d'où $|xy| < 1$ et donc $xy > -1$; remarquons que $1 + x + y + xy = (1+x)(1+y)$ et $xy - x - y + 1 = (1-x)(1-y)$ sont tous deux positifs, puisque produit de deux nombres positifs, d'après les encadrements de x et y ; on aura donc $-1 - xy < x + y < 1 + xy$, et $(1 + xy \text{ étant } > 0)$ $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$, ce qui montre que $x \star y \in E$.
- 2 Soit x, y et z trois éléments quelconques de E . Calculons $a = x \star (y \star z)$ et $b = (x \star y) \star z$. On a

$$a = \frac{x + (y \star z)}{1 + x(y \star z)} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x + xyz + y + z}{1 + yz + xy + xz}$$

$$b = \frac{(x \star y) + z}{1 + (x \star y)z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}.$$

On a donc bien $a = b$, c'est-à-dire que $\forall(x, y, z) \in E^3$, $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$, ce qui est la définition de l'associativité de \star .

- 3** f est une application de \mathbf{R} dans E (puisque $-1 < \operatorname{th} x < 1$). Montrons que c'est un morphisme, c'est-à-dire que $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x + y) = f(x) \star f(y)$. En effet, on a $\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{sh}(x + y)}{\operatorname{ch}(x + y)} = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}$; simplifiant par $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$, on obtient $\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} = (\operatorname{th} x) \star (\operatorname{th} y)$, ce qui est la propriété de «transport de structure» souhaitée. f est surjective (c'est même une bijection, puisque pour tout $X \in E$, l'équation $f(x) = \operatorname{th} x = X$ admet la solution unique $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+X}{1-X}$, obtenue en posant $Y = e^{2x}$); montrons que cela entraîne que (E, \star) est un groupe abélien. La commutativité de \star , en effet, vient de ce que pour tout $(X, Y) \in E^2$, il existe $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $X = f(x)$ et $Y = f(y)$; comme $x + y = y + x$ (commutativité de $+$), et que $f(x + y) = f(x) \star f(y) = X \star Y$ et $f(y + x) = f(y) \star f(x) = Y \star X$ on a donc $X \star Y = Y \star X$. On raisonnerait de même pour l'associativité si elle n'avait pas été déjà montrée précédemment; de plus, $f(0) = 0$ doit être élément neutre, puisque tout X de E admet un antécédent x par f , et que $X = f(x) = f(x + 0) = f(x) \star f(0) = X \star f(0)$; enfin, si x est un antécédent de X , et x' un symétrique de x pour $+$ (ici, $x' = -x$), $f(x')$ sera un symétrique de X pour \star , puisque $f(x + x') = X \star f(x') = f(0)$. Ainsi, (E, \star) est un groupe abélien, et, f étant une bijection, $(\mathbf{R}, +)$ et (E, \star) sont isomorphes.

Remarques.

- 1 En général, le fait que les lois soient «internes» est équivalent à la stabilité de l'ensemble, considéré comme une sous-structure; mais les énoncés sont parfois ambigus (ne faisant pas la différence entre fonction et application), et il faudra aussi contrôler que les «formules» sont définies pour tous les éléments de E .
- 2 Même pour des structures assez simples, le contrôle de tous les axiomes est un tâche fastidieuse, et il est en général plus rapide de se ramener à des structures connues, soit en vérifiant qu'on a affaire à une sous-structure (sous-ensemble **non vide** et stable pour la ou les lois considérées), soit en déterminant, comme ici, un morphisme **surjectif** allant d'une des structures classiques (nombres, polynômes, fonctions, etc.) vers celle qu'on veut étudier. Malheureusement, ce dernier cas, sauf si l'énoncé indique le morphisme à utiliser, demande le plus souvent des qualités de divination hors de portée des élèves de prépa. . .
- 3 Réciproquement, partant d'une bijection f de (E, \star) vers F , on peut définir une loi \perp de composition interne sur F par la «formule» $a \perp b = f(f^{-1}(a) \star f^{-1}(b))$, et ce n'est qu'un ensemble fastidieux de vérifications de montrer que f est un isomorphisme, et que (E, \star) et (F, \perp) ont les «mêmes» propriétés (ainsi, si e est élément neutre pour \star , $f(e)$ sera élément neutre pour \perp). On dit que \perp est définie par transport de structure. Le lecteur vérifiera, par exemple, que la bijection $x \mapsto \operatorname{sh} x$ permet ainsi de définir sur \mathbf{R} la loi $x \perp y = x \sqrt{y^2 + 1} + y \sqrt{x^2 + 1}$, et donc que (\mathbf{R}, \perp) est un groupe abélien. Mais en général, on n'obtient guère de simplification dans les formules ainsi obtenues : transporter de même la multiplication aboutit certes à un corps $(\mathbf{R}, \perp, \star)$, mais dont la loi \star est donnée par

$$x \star y = \frac{1}{2} \left((x + \sqrt{x^2 + 1})^{\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})} - (x + \sqrt{x^2 + 1})^{-\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})} \right)$$

4 Si le contrôle des axiomes de «calcul» (associativité, distributivité, etc.) est seulement en général un exercice (fastidieux) de vérification d'identités, la recherche d'éléments neutres ou symétriques peut devenir délicate; on pensera à exploiter leur unicité pour appliquer les méthodes de construction de la fiche n° 28.

Puissances de matrices

Énoncé.

Soit A la matrice 2×2 définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que (I_2, A, A^2) est une famille liée de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, et en déduire que, pour tout n , on peut écrire $A^n = a_n I_2 + b_n A$; déterminer une relation de récurrence entre les a_i et les b_i , et en déduire une expression explicite des coefficients de A^n .

Méthode.

- 1 *Le calcul direct de A^2 , puis de a_2 et b_2 semble nécessaire ($\mathcal{F} = (I_2, A)$ étant libre, l'énoncé implique que A^2 soit combinaison linéaire de \mathcal{F}); ensuite, il faut remarquer qu'on aura donc $A^{n+2} = a_2 A^n + b_2 A^{n+1}$, et en tirer une récurrence (étendue); on peut aussi passer de $A^n = aI + bA$ à $A^{n+1} = aA + bA^2 = \dots$*
- 2 *C'est d'ailleurs cette récurrence qui va donner les a_n et les b_n ; mais il faudra penser à «éliminer» l'une des deux suites, pour obtenir une relation de récurrence (linéaire à deux termes) entre les a_i .*
- 3 *On n'hésitera pas à exploiter les calculettes pour obtenir rapidement les valeurs de A^3, A^4 , etc. permettant de contrôler les formules obtenues...*

Solution.

- 1 On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$; posant $A^2 = xI_2 + yA$, on voit que x et y doivent vérifier $x + y = 7$, $-2y = -6$, $-3y = -9$ et $x + 2y = 10$, système effectivement satisfait par le couple $(4, 3)$. Ainsi, $A^2 = 4I_2 + 3A$. Supposons que $A^n = a_n I_2 + b_n A$, on aura donc $A^{n+1} = a_n A + b_n A^2 = a_n A + b_n (4I_2 + 3A) = 4b_n I_2 + (a_n + 3b_n)A$. Comme la relation est vraie pour $n = 2$, elle l'est par récurrence pour tout $n \geq 2$ (et on peut même la prolonger, en posant $A^1 = 0I_2 + 1A$ et $A^0 = I_2 = 1I_2 + 0A$); ainsi, les (a_n, b_n) vérifient la relation de récurrence $a_{n+1} = 4b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n$ (récurrence «croisée»).
- 2 Remarquant que, par substitution, $b_{n+2} = a_{n+1} + 3b_{n+1} = 3b_{n+1} + 4b_n$, on voit que la suite (b_n) vérifie une récurrence linéaire à deux termes, et on sait que de telles suites sont combinaisons de deux suites particulières vérifiant la même relation. Cherchant donc d'abord les suites géométriques $u_n = k^n$ la vérifiant, on aboutit à l'équation caractéristique $k^2 = 3k + 4$, et donc aux deux suites $(u_n) = (4^n)$ et $(v_n) = (-1)^n$. On doit donc avoir $b_n = c \cdot 4^n + d \cdot (-1)^n$; comme $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$, on en déduit (par identification) que $c = 1/5 = -d$, et donc que $b_n = \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}$, et aussi que $a_n = 4b_{n-1} = \frac{4^n + 4 \cdot (-1)^n}{5}$. Finalement, on aboutit donc à

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2^{2n+1} + 3 \cdot (-1)^n & 2 \cdot (-1)^n - 2^{2n+1} \\ 3 \cdot (-1)^n - 4^n & 3 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n \end{pmatrix}$$

Remarques.

- 1 La démonstration (par récurrence) de la formule explicite donnant (b_n) n'a pas été faite : elle est supposée connue à ce stade. De même, on ne rédige en principe pas les calculs matriciels, mais on peut les présenter ainsi :

$$\text{Calcul de } A^2 : \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$$

- 2 La même méthode permet en principe le calcul des puissances d'une matrice quelconque (on démontrera en Spé que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^n)$ est liée), mais la récurrence correspondant aux coefficients de la relation de dépendance ne peut être résolue en général; une méthode plus simple exploitant la diagonalisation sera exposée au chapitre 19.
- 3 Rappelons également que les récurrences linéaires à deux termes peuvent obliger à passer par les complexes, et qu'une nouvelle difficulté intervient en cas de racines doubles (ce dernier cas correspond en fait à des matrices non diagonalisables); ainsi, si on avait pris $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, on aurait obtenu $B^2 = 4B - 4I_2$, $b_{n+2} = 4b_{n+1} - 4b_n$ et $k^2 = 4k - 4$; il aurait alors fallu chercher b_n de la forme $b_n = (cn + d)2^n$.
- 4 Le fait que l'équation caractéristique de la récurrence ($k^2 = 4k + 3$) soit «formellement» identique à la relation $A^2 = 4A + 3I_2$ n'est nullement une coïncidence : c'est un cas particulier de ce qu'on appelle le théorème de Cayley-Hamilton, qui donne une telle «relation polynomiale» pour toute matrice. Bien que ce théorème soit hors-programme, on en examine souvent des cas particuliers en Spé, mais son énoncé précis demandera que la théorie de la diagonalisation ait été développée.

Puissances de matrices : utilisation de la formule du binôme**Énoncé.**

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Remarquer que $(A - I_3)^3 = O_3$, et en déduire A^n pour tout n de \mathbf{N}^* . Peut-on prolonger ce résultat à $n \in \mathbf{Z}$?

Méthode.

- 1 Posant $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on vérifie aisément que N est nilpotente ($N^3 = O$).
- 2 Comme I et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme, qui se réduit ici à trois termes.
- 3 Posant conventionnellement $A^0 = I_3$ et $A^{-n} = (A^{-1})^n$, il ne reste plus qu'à vérifier que les formules obtenues s'appliquent encore, mais il est plus astucieux d'utiliser l'«identité remarquable» $(I + N)(I - N + N^2) = I - N^3 = I$. Cependant, le prolongement de la formule à \mathbf{Z} n'est pas très facile, à moins de réutiliser la formule du binôme...

Solution.

- 1 Posons $I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par calcul direct, on obtient $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = O_3$. Or N et I commutent ($IN = NI = N$); on peut donc appliquer la formule du binôme à $A = I + N$, obtenant $A^n = (I + N)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k I^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n C_n^k N^k$ (avec la convention $M^0 = I$). De plus, dans cette somme, tous les termes correspondant à $k \geq 3$ sont nuls, puisque $N^{3+a} = N^3 N^a = ON^a = O$. Ainsi, $A^n = I + C_n^1 N + C_n^2 N^2 = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$, et donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2 Posons, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $M(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $M(n) = A^n$ pour $n > 0$, $M(0) = I$, et $M(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I - N + N^2$. Or on sait (pour des matrices P et Q qui commutent) que $(P + Q)(P^2 - PQ + Q^2) = P^3 + Q^3$, et donc

ici que $M(-1)(I + N) = I^3 + N^3 = I$, ce qui prouve que $M(-1)$ est l'inverse de A ; A est donc régulière et $A^{-1} = M(-1)$. On sait que A^{-p} vaut (par définition) $(A^{-1})^p$, et que c'est l'inverse de A^p ; remarquant que $M(-1) = A^{-1} = I + N'$, avec $N' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a de même N' nilpotente ($N'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N'^3 = 0$), et le même raisonnement que précédemment aboutit à $A^{-n} = (I + N')^n = I + nN' + \frac{n(n-1)}{2}N'^2$, et donc $A^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & -2n & 2n^2 - n \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or ceci est $M(-n)$; en définitive, la «formule» $A^p = M(p)$ est donc vraie pour tout $p \in \mathbf{Z}$.

Remarques.

- 1 Ces méthodes sont applicables à des matrices de la forme $I + N$, avec N nilpotente, c'est-à-dire typiquement à des matrices triangulaires supérieures; on en verra en Spé des applications à des matrices «triangularisées» (les matrices de Jordan). Cependant, il ne faudrait pas croire qu'on peut généraliser sans précaution : la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, par exemple, ne peut être traitée ainsi (car $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne commutent pas : $CD = C$ et $DC = 2C$!); la même méthode devrait être adaptée, en posant $A = I + K$ et en remarquant que $K^2 = K$, d'où $A^n = I + K(C_n^1 + C_n^2 + \dots) = I + (2^n - 1)K$.
- 2 Il aurait été maladroit, étant donné l'esprit de l'énoncé, d'essayer d'inverser directement A^n , mais à vrai dire, les calculs correspondants ne sont pas très difficiles, A^n étant une matrice triangulaire; rappelons qu'il s'agit de résoudre le système $A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, et, obtenant par exemple $x = X - 2nY + (2n^2 - n)Z$, d'en déduire la première ligne de $(A^n)^{-1}$.
- 3 Le fait que la formule se généralise aux puissances négatives n'est pas accidentel, mais reste inexplicable sans faire appel à des théories puissantes (et largement hors-programme) : la diagonalisation est, ici encore, l'outil préliminaire indispensable, mais des démonstrations rigoureuses ne sont faciles, justement, que dans le cas «diagonalisable» (car la formule $M^n = P D^n P^{-1}$ est valable même pour $n < 0$).
- 4 En revanche, bien que $M(x)$ conserve un sens pour x non entier, une généralisation plus grande encore semble illusoire; le lecteur (trop?) curieux pourra cependant remarquer que $P = M(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $P^2 = A \dots$

**Polynômes de Bernoulli :
étude d'un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$**
Énoncé.

Soit Φ l'application de $\mathbf{R}[X]$ dans lui-même définie par $\Phi(P) = Q$ tel que (pour tout $x \in \mathbf{R}$) $Q(x) = P(x) - P(x - 1)$. Montrer que Φ est un endomorphisme dont on déterminera le noyau. En utilisant Φ_n , restriction de Φ à $\mathbf{R}_n[X]$, montrer que Φ est une surjection, et en déduire pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ l'existence d'un polynôme unique, B_n , tel que $B_n(x) - B_n(x - 1) = x^n$ et que $B_n(0) = 0$. Montrer enfin que B_n est divisible par $X + 1$, et, en étudiant le polynôme C défini par $C(x) = -B_{2n}(-1 - x)$, montrer que B_{2n} est divisible par $2X + 1$.

Méthode.

- 1 Bien qu'il soit «trivial» que Φ est linéaire, on se pliera au contrôle rituel de $\Phi(P + \lambda Q) = \Phi(P) + \lambda\Phi(Q)$ (en identifiant polynômes et fonctions polynômes). Les polynômes du noyau sont ceux qui, pour tout x , vérifient $P(x - 1) = P(x)$, c'est-à-dire les polynômes 1-périodiques; on cherchera un argument simple montrant que seuls les constantes ont cette propriété...
- 2 La restriction de Φ à $\mathbf{R}_n[X]$ est un endomorphisme en dimension finie; appliquant la formule du rang, et remarquant que $\deg(P) \leq n \Rightarrow \deg(\Phi(P)) \leq n - 1$, on en déduit $\text{Im } \Phi$.
- 3 L'existence de B_n est facile à déduire, et -1 est racine évidente de B_n . Par contre, prouver que $-1/2$ est aussi racine de B_{2n} serait presque impossible sans l'indication de l'énoncé : il faut montrer que le polynôme C vérifie les mêmes propriétés que B_{2n} ($\Phi(C) = X^{2n}$ et $C(0) = 0$), et remarquer que $C(-1/2) = -B_{2n}(-1/2)$!

Solution.

- 1 Montrons d'abord la linéarité de Φ : posant $Q_1 = \Phi(P_1)$ et $Q_2 = \Phi(P_2)$, si $Q = \Phi(P_1 + \lambda P_2)$, c'est que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} Q(x) &= P_1(x) + \lambda P_2(x) - P_1(x - 1) - \lambda P_2(x - 1) \\ &= P_1(x) - P_1(x - 1) + \lambda(P_2(x) - P_2(x - 1)) \\ &= Q_1(x) + \lambda Q_2(x), \end{aligned}$$

et donc que $Q = Q_1 + \lambda Q_2$. Φ est donc un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$, et $\text{Ker } \Phi = \{P \in \mathbf{R}[X] / \forall x \in \mathbf{R}, P(x) - P(x - 1) = 0\}$. Ainsi, les polynômes de $\text{Ker } \Phi$ sont les polynômes 1-périodiques; or, si P est un tel polynôme, le polynôme $Q = P - P(0)$ devrait s'annuler pour tout $n \in \mathbf{Z}$, ce qui n'est possible (d'Alembert) que pour le polynôme nul; $\text{Ker } \Phi$ est donc l'ensemble des polynômes constants.

- 2 Soit alors Φ_n la restriction de Φ à $\mathbf{R}_n[X]$; il est clair que si $\deg(P) = m$ (et donc $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, avec $a_m \neq 0$), on aura $\deg(\Phi(P)) \leq m - 1$, puisque le seul terme en x^m provient de $a_m x^m - a_m (x - 1)^m = m a_m x^{m-1} + \dots$. Or Φ_n est un endomorphisme (on vient de le montrer), dont le noyau est le même que $\text{Ker } \Phi$

(et est donc la droite vectorielle $\mathbf{R}_0[X]$). La formule du rang nous donne donc $\text{rg } \Phi_n + \dim \text{Ker } \Phi_n = \text{rg } \Phi_n + 1 = \dim(\mathbf{R}_n[X]) = n + 1$, et donc $\text{rg } \Phi_n = n$. Mais $\text{Im } \Phi_n \subset \mathbf{R}_{n-1}[X]$, et $\dim \text{Im } \Phi_n = \dim \mathbf{R}_{n-1}[X] = n$; on en déduit que $\text{Im } \Phi_n = \mathbf{R}_{n-1}[X]$, ce qui prouve que pour tout polynôme Q de degré $\leq n - 1$, il existe un polynôme P (de degré $\leq n$) tel que $\Phi_n(P) = \Phi(P) = Q$. Comme, dans ce résultat, n est arbitraire, on voit que tout polynôme Q possède un antécédent par Φ , et donc que Φ est un endomorphisme surjectif.

- 3 Ainsi, $Q = X^n$ possède un antécédent P ; posant $B_n = P - P(0)$, B_n est donc nul en 0, et $\Phi(B_n) = \Phi(P) - \Phi(P(0)) = Q - \tilde{0} = Q$, ce qui montre qu'il existe un polynôme B_n satisfaisant aux conditions de l'énoncé. S'il en existait un autre, on aurait $\Phi(B_n - P) = Q - Q = \tilde{0}$, et donc $B_n - P \in \text{Ker } \Phi$, soit $B_n - P$ constante, et comme on devrait avoir $B_n(0) = P(0) = 0$, on voit que cela entraîne l'unicité de B_n .
- 4 $B_n(0) = 0$, donc $B_n(0) - B_n(-1) = 0^n = 0 \Rightarrow B_n(-1) = 0$ (si $n > 0$). Ainsi, -1 est racine de B_n , qui est donc divisible par $X + 1$. Étudions le polynôme C défini (pour tout x) par $C(x) = -B_n(-1 - x)$ (avec $n > 0$). On a $\Phi(C)(x) = C(x) - C(x - 1) = -B_n(-1 - x) + B_n(-x) = (-x)^n$, et $C(0) = B_n(-1) = 0$. Or, si n est pair, $(-x)^n = x^n$, ce qui signifie que C vérifie les deux conditions caractéristiques de B_n ; d'après l'unicité des B_n , on a donc (pour tout $x \in \mathbf{R}$) $B_{2n}(x) = C(x) = -B_{2n}(-1 - x)$, et en particulier $B_{2n}(-1/2) = -B_{2n}(-1 + 1/2) = -B_{2n}(-1/2)$, donc $B_{2n}(-1/2) = 0$ et B_{2n} est divisible par $2X + 1$.

Remarques.

- 1 Bien entendu, Φ peut être surjectif, bien que non injectif, car $\mathbf{R}[X]$ est de dimension infinie. C'est même la raison qui oblige, pour déterminer $\text{Im } \Phi$, à l'approche indirecte du calcul des $\text{Im } \Phi_n$. Dans des espaces «plus grands» encore, tels les espaces fonctionnels, même cette démarche devient inefficace, et par exemple, montrer que l'endomorphisme Ψ de $C^\infty(\mathbf{R})$ défini par $\Psi(f) = f'' + f$ est surjectif ne peut se faire qu'en utilisant le théorème de Cauchy (linéaire).
- 2 Les B_n s'appellent les polynômes de Bernoulli; cette famille classique permet le calcul des sommes de puissances d'entiers : $\sum_{k=1}^p k^n = \sum_{k=1}^p (B_n(k) - B_n(k - 1)) = B_n(p) - B_n(0) = B_n(p)$. Les propriétés de cette famille constituent une inépuisable réserve de sujets de concours; outre les méthodes qu'on vient de voir, on a vu aussi au chapitre 5 des relations combinatoires entre les B_n (obtenues en prenant $B_n(x + 1) - B_n(x) = (x + 1)^n = \sum C_n^k x^k$, et en sommant ces égalités).
- 3 La même idée permet aussi, par exemple, de relier les B_n entre eux : étudiant $D_n = B'_{n+1}/(n+1)$, on voit aisément que $\Phi(D_n) = x^n$, et donc que $B'_{n+1} = B_n + a_n$, où a_n est une constante, appelée le $n^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli.
- 4 Mais ces polynômes (et ces constantes) apparaissent également à de nombreux autres endroits inattendus : ainsi, Euler a montré qu'en posant $f : t \mapsto \frac{te^{xt}}{e^t - 1}$, on a $f^{(k)}(0) = B'_k(x - 1)$; il est plus étonnant encore que la formule de Stirling puisse être précisée, à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln 2\pi}{2} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \dots + \frac{a_p}{p(p+1)n^p} + o(n^{-p})$$

(c'est un cas particulier de la «formule sommatoire d'Euler-MacLaurin»)

Projecteurs

Énoncé.

Soit E un K -espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E qui commutent (c'est-à-dire que $p \circ q = q \circ p$). Montrer que $r = p \circ q$ et $s = p + q - r$ sont des projecteurs, dont on déterminera les images et les noyaux en fonction de ceux de p et q .

Méthode.

- 1 La vérification de ce que r et s sont des projecteurs ($r \circ r = r$ et $s \circ s = s$) n'est qu'un calcul «formel» dans $\mathcal{L}(E)$ (on en rappellera au besoin les règles).
- 2 En revanche, la recherche des noyaux et des images semble difficile. Partant de $\text{Ker } q \subset \text{Ker}(p \circ q)$ (qui semble évidente), on en déduit que $\text{Ker } p + \text{Ker } q \subset \text{Ker } r$; de même, on voit facilement que $\text{Im } r \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$. L'intuition (ou plus probablement une indication fournie par l'auteur de l'exercice) peut amener à deviner que ces inclusions sont en fait des égalités; c'est ce que l'on tentera de montrer...
- 3 En fait, montrer que $\text{Ker } r \subset \text{Ker } p + \text{Ker } q$ est essentiellement un problème de construction : prenant x tel que $p(q(x)) = 0_E$, on essaie d'écrire $x = x_1 + x_2$ avec $p(x_1) = q(x_2) = 0_E$, donc $p(x) = p(x_2)$; un bricolage du genre $x = (x - p(x)) + p(x)$ devrait mettre sur la voie.
- 4 La même démarche peut s'appliquer à s , mais il est plus astucieux de remarquer que $\text{Id} - s = (\text{Id} - p) \circ (\text{Id} - q)$, et que si f est un projecteur, $\text{Id} - f$ l'est également.

Solution.

- 1 Si p et q sont des projecteurs (c'est-à-dire que p et q sont des endomorphismes de E tels que $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$), $r = p \circ q$ est un endomorphisme, et $r \circ r = (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q$ (associativité de \circ), donc $r \circ r = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q = r$, puisque p et q commutent. De même, $s \circ s = (p + q - p \circ q) \circ (p + q - p \circ q) = p \circ p + p \circ q - p \circ p \circ q + q \circ p + q \circ q - q \circ p \circ q$ (\circ étant distributive sur $+$ dans $\mathcal{L}(E)$), donc $s \circ s = p + q + 2p \circ q - p \circ q = s$. Ainsi, r et s sont bien deux projecteurs de E .
- 2 Déterminons d'abord l'image de r ; si $x \in \text{Im } r$ (donc $\exists y \in E, x = r(y)$), on a $x = p(q(y))$, donc $x \in \text{Im } p$, ce qui montre que $\text{Im } r \subset \text{Im } p$, d'où $\text{Im } r \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$. Réciproquement, si x appartient à $\text{Im } p \cap \text{Im } q$, $\exists (y_1, y_2) \in E^2, x = p(y_1) = q(y_2)$. Mais alors, $q(p(y_1)) = q(q(y_2)) = q(y_2) = x$, et donc x est l'image par r de y_1 , ce qui montre que $x \in \text{Im } r$; ainsi, $\text{Im } r = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.
- 3 Soit maintenant $x \in E$ appartenant à $\text{Ker } p$: on a $p(x) = 0_E \Rightarrow q(p(x)) = 0_E$, donc $x \in \text{Ker}(q \circ p)$. De même, si $y \in \text{Ker } q$, y appartiendra à $\text{Ker}(p \circ q)$; en définitive, $\text{Ker } p \cup \text{Ker } q \subset \text{Ker } r$. Or $\text{Ker } r$ est un sous-espace vectoriel de E , et on sait que si A et B sont deux sous-espaces inclus dans un sous-espace S , $A + B \subset S$ (par stabilité de S). Ainsi, on doit avoir $\text{Ker } p + \text{Ker } q \subset \text{Ker } r$. Montrons que, réciproquement, $\text{Ker } r \subset \text{Ker } p + \text{Ker } q$. Soit $x \in E$ tel que $p(q(x)) = 0_E$. Posons $x = (x - p(x)) + p(x)$, on a $p(x_1) = p(x - p(x)) = 0_E$, et $q(x_2) = q(p(x)) = p(q(x)) = 0_E$, ce qui montre

que tout élément $x \in \text{Ker } r$ peut s'écrire $x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \text{Ker } p$ et $x_2 \in \text{Ker } q$. Ainsi, $\text{Ker } p + \text{Ker } q = \text{Ker } r$.

- 4 Remarquons à présent que si p est un projecteur, il en est de même de $p' = \text{Id} - p$, où Id est l'application identité de E , définie par $\text{Id}(x) = x$ pour tout x de E : $(\text{Id} - p) \circ (\text{Id} - p) = \text{Id} - 2p + p \circ p = \text{Id} - p$ (puisque Id et p commutent); de plus, on sait que $\text{Ker } p' = \text{Im } p$ et $\text{Im } p' = \text{Ker } p$ (en effet $p'(p(y)) = p(y) - (p \circ p)(y) = 0$, et $p'(x) = 0 \Rightarrow x = p(x) \Rightarrow x \in \text{Im } p$). Il ne reste alors qu'à remarquer que $p' \circ q' = (\text{Id} - p) \circ (\text{Id} - q) = \text{Id} - p - q + p \circ q = \text{Id} - s$ pour conclure, en utilisant les résultats précédents sur r (ou plutôt r') que $\text{Ker}(\text{Id} - s) = \text{Ker } p' + \text{Ker } q' = \text{Im } p + \text{Im } q$, et donc que $\text{Im } s = \text{Im } p + \text{Im } q$, et de même que $\text{Im}(\text{Id} - s) = \text{Im } p' \cap \text{Im } q' = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$, et donc que $\text{Ker } s = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Remarques.

- 1 Dans le cadre d'un problème plus étendu, on aurait pu aussi demander de construire des exemples pour p et q ; ainsi, dans \mathbf{R}^3 , si on prend pour p la projection sur le plan (vectoriel) P_1 parallèlement à la droite D_1 , et pour q la projection sur P_2 parallèlement à D_2 (avec $P_1 \neq P_2$), la condition $p \circ q = q \circ p$ équivaut à $D_2 \subset P_1$ et $D_1 \subset P_2$, et alors r est la projection sur $P_1 \cap P_2$ parallèlement au plan $D_1 + D_2$, et s est l'identité.
- 2 Un autre exemple intéressant, dans $\mathbf{R}[X]$, est l'endomorphisme f_A qui associe à P son reste dans la division euclidienne par A ; les projecteurs $p = f_A$ et $q = f_B$ ne commutent pas en général (par exemple $f_{X^2+1}(f_{X+1}(X^3 + 1)) = 0$, mais $f_{X+1}(f_{X^2+1}(X^3 + 1)) = 2$), mais c'est le cas si A divise B ; le lecteur pourra vérifier qu'alors $r = p \circ q = p$ et $s = q$.
- 3 Il est néanmoins difficile de donner des illustrations concrètes non triviales de ces exercices abstraits, et ils servent surtout à familiariser les étudiants avec des modes de raisonnement délicats, mais indispensables. Si le calcul dans $\mathcal{L}(E)$ n'est pas très difficile, et prolonge le calcul matriciel, la détermination d'images et de noyaux est souvent acrobatique, surtout si l'énoncé ne donne pas d'indications sur la réponse à obtenir (ou même sur sa forme). On a vu que, même avec ces indications, un travail très soigné et rigoureux est nécessaire pour montrer que $A = B$, quand A et B sont des ensembles; on n'échappe que rarement à la nécessité de prouver la double inclusion ($A \subset B$ et $B \subset A$).
- 4 On sait que l'image et le noyau d'un projecteur le caractérisent (avec $\text{Ker } p \oplus \text{Im } p = E$); on aurait pu utiliser ce résultat et la formule de la dimension pour passer des images (on a vu que la détermination de $\text{Im } r$ n'était pas très difficile) aux noyaux; mais hélas, l'énoncé ne supposait pas que E soit de dimension finie. . .
- 5 Le lecteur pourra utilement prolonger l'exercice en s'intéressant aux symétries associées (on appelle symétrie associée à un projecteur p l'endomorphisme $s_p = 2p - \text{Id}$; c'est une involution ($s_p \circ s_p = \text{Id}$), et on montre aisément que, réciproquement, si s est une involution, $(s + \text{Id})/2$ est un projecteur) : il essaiera en particulier de montrer que s_p et s_q commutent, et de déterminer directement s_r et s_s en fonction de s_p et s_q .

Matrices et applications linéaires

Énoncé.

Soit f l'endomorphisme de \mathbf{R}^4 représenté, dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, par la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de f (selon α), et expliciter,

dans les différents cas, une base de l'image et une base du noyau de f . On suppose désormais que α est non nul; on pose $\varepsilon_1 = \lambda \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_4$, où λ est un nombre réel, $\varepsilon_2 = \mathbf{e}_2$, $\varepsilon_3 = \mathbf{e}_3$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$; on appelle F l'image de f . Déterminer λ pour que \mathcal{B} soit une base de F . Supposant λ ainsi fixé, soit g la restriction de f à F . Montrer que g est un endomorphisme de F , et déterminer N , la matrice représentative de g dans la base \mathcal{B} ; montrer que N est inversible.

Méthode.

- 1 *Il est bien entendu indispensable, pour aborder cet exercice, de maîtriser parfaitement le «codage» des applications linéaires; on sait d'autre part que le rang de f est égal au rang de M (qu'on calculera plus aisément par les lignes).*
- 2 *M étant de «petite» dimension, on ne reviendra pas aux formules générales, et on pourra par exemple écrire sans justification autre que
«par définition, ...» des calculs tels que $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \alpha\mathbf{e}_4$.*
- 3 *« N inversible» équivaut à « g automorphisme»; la formule du rang (ou plus simplement la détermination de $\text{Ker } g$) permet de le prouver directement.*

Solution.

- 1 On sait que $\text{rg}(f) = \text{rg}(M)$; les deux premières lignes de M sont indépendantes; on voit donc que $\text{rg}(M) \geq 2$. Si $\alpha = 0$, les deux dernières lignes étant nulles, on aura $\text{rg}(M) = 2 = \text{rg}(f)$. Si α n'est pas nul, la première et la troisième ligne de A forment une famille libre, et (à cause de la troisième coordonnée), on voit que la deuxième ligne en est indépendante. Enfin, la quatrième ligne est liée (proportionnelle) à la première; le rang de M (et aussi de f) est donc 3.
- 2 Supposons d'abord α non nul. D'après la formule du rang, le noyau de f doit être de dimension $4 - 3 = 1$, autrement dit une droite vectorielle. Or $f(x, y, z, t) = (x + y, 2x + y + z + t, \alpha t, \alpha x + \alpha y)$, donc $(x, y, z, t) \in \text{Ker}(f) \iff x + y = 2x + y + z + t = \alpha t = \alpha x + \alpha y = 0$; on voit aisément que le vecteur $(1, -1, -1, 0)$ est donc dans $\text{Ker}(f)$, et en est une base d'après ce qui vient d'être dit. On sait que l'image est alors engendrée par trois vecteurs indépendants, et on vérifie aisément qu'il en est bien ainsi des vecteurs $f(\mathbf{e}_1) = (1, 2, 0, \alpha)$, $f(\mathbf{e}_2) = (1, 1, 0, \alpha)$ et $f(\mathbf{e}_4) = (0, 1, \alpha, 0)$ (on pourrait, mais au prix de plus de calculs, prendre d'autres combinaisons linéaires de ces vecteurs (formant une base de $\text{Im } f$), telles que \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 et $\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_4$). Si $\alpha = 0$, on voit que \mathbf{e}_3 n'est plus dans l'image (qui est engendrée par \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2); le noyau contient encore $(1, -1, -1, 0)$, mais aussi $(0, 0, 1, -1)$ (comme

on le voit en réexaminant les équations précédentes) et la formule du rang montre que ces deux vecteurs en constituent une base.

- 3 On a vu que (si α n'est pas nul), e_2 et e_3 sont dans F ; il est clair que ε_1 est indépendant de ces deux vecteurs; \mathcal{B} sera donc une base de F si $\varepsilon_1 = (\lambda, 0, 0, \alpha)$ est dans F . Or on a vu que $(1, 0, 0, \alpha)$ est dans F ; si ε_1 était dans F , avec $\lambda \neq 1$, on aurait e_1 , puis e_4 dans F , ce qui est absurde puisque $\dim(F) = 3$. On en déduit que \mathcal{B} est une base de F si et seulement si $\lambda = 1$.
- 4 F étant l'image de f , on a par définition $f(F) \subset \text{Im}(f) = F$, g est donc un endomorphisme de F . Dans la base \mathcal{B} , on a $g(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$, $g(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $g(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \alpha\varepsilon_2 + \alpha^2\varepsilon_3$; on en déduit $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 + \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Montrons que $\text{Ker } g = \{0\}$: si $\mathbf{v} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$, on aura $g(\mathbf{v}) = (x + y, (2 + \alpha)x + y + z, \alpha^2x)_{\mathcal{B}}$, et donc $g(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow x = 0$ (puisque $\alpha \neq 0$), puis $y = z = 0$, ce qui prouve que g est un automorphisme de F , et donc que N est inversible.

Remarques.

- 1 *Il faut bien avouer l'intérêt limité de ce genre de calculs (apparaissant cependant fréquemment dans des problèmes de concours : celui-ci est extrait des Mines de Douai 1989); la gymnastique qu'ils réclament s'avère cependant indispensable pour coder des endomorphismes plus «abstraites», par exemple dans $\mathbf{R}[X]$.*
- 2 *Néanmoins, on utilisera avec profit toutes les propriétés des endomorphismes étudiés permettant de faire l'économie de calculs matriciels : ainsi, par exemple, si f était un projecteur, on en déduirait immédiatement que $M^2 = M$; de même, on verra au chapitre 19 que si \mathcal{B} est une base de vecteurs propres de f , la matrice de f dans \mathcal{B} est une matrice diagonale.*

Déterminants de Vandermonde

Énoncé.

Soit M_n la matrice (carrée d'ordre n) $M_n = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par $m_{ij} = x_i^{j-1}$, et $D_n = \det(M_n)$. Posant $X = x_n$, montrer que D_n est un polynôme (de variable X) dont on déterminera le degré, et dont les x_i (pour $1 \leq i \leq n-1$) sont les racines. En déduire une factorisation complète de D_n , puis remarquer que le coefficient du terme de plus haut degré de D_n est D_{n-1} ; en déduire l'expression de D_n sous forme d'un produit de facteurs $(x_i - x_j)$.

Méthode.

1 L'expérimentation (à moins d'utiliser Maple) n'apporte pas grand-chose ici : il est

clair que $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$, mais la factorisation de $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$ s'avère déjà délicate si on ne passe pas par des transformations de lignes, obtenant $D_3 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)$.

2 Le développement du déterminant D_n selon la dernière ligne fait apparaître un polynôme en X (de degré $n-1$) dont les coefficients sont les cofacteurs; en particulier le coefficient de X^{n-1} est D_{n-1} (mais il faudra le démontrer rigoureusement).

3 Si on pose $X = x_i$, D_n est un déterminant où figure deux lignes égales; il est donc nul et x_i en est une racine.

4 Une récurrence simple montre donc que $D_n = \prod (x_i - x_j)$ (il faudra préciser les indices), mais ce résultat n'a été démontré que si les x_i sont tous distincts; on achèvera l'exercice en remarquant que D_n est trivialement nul dans le cas contraire !

Solution.

1 Posons $x_n = X$, et développons D_n selon la dernière ligne : on obtient

$$D_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} K_{in} X^{i-1}$$
 (où les K_{in} sont les déterminants des mineurs, les matrices M_{in} définies en retranchant à M_n la i -ème colonne et la n -ème ligne). D_n est donc un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, de degré $n-1$. Si on prend alors $X = x_i$ (pour $1 \leq i \leq n-1$), on a par construction $P(x_i)$ déterminant d'une matrice ayant deux lignes égales, donc nul (la famille des lignes étant liée); ceci montre que P admet x_i pour racine.

2 Supposons à présent que les x_i soient tous distincts. P aura donc $n-1$ racines distinctes, et on sait qu'on peut donc écrire $P(X) = a_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$, où a_{n-1} est le coefficient du terme de (plus haut) degré $n-1$; or on a vu que ce coefficient est $(-1)^{n+n} K_{nn}$, et que $K_{nn} = D_{n-1}$; on obtient donc $P(X) = D_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$, et prenant $X = x_n$, $D_n = D_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$. Par récurrence, et supposant

toujours les x_i distincts, on aura donc $D_n = D_{n-2} \prod_{i=1}^{n-2} (x_{n-1} - x_i) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$, etc. et finalement $D_1 = 1$ et, si $n \geq 2$,

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

- 3** Or si deux des x_i sont égaux, le déterminant D_n est nul (comme on l'a vu plus haut) et il en est de même du produit que l'on vient d'écrire; en résumé, et dans tous les cas, cette formule donne bien D_n (pour $n \geq 2$).

Remarques.

- 1** L'écriture d'un déterminant sous forme de polynôme se produit assez fréquemment; on a vu par exemple l'utilité du polynôme caractéristique $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n)$. Il est un peu plus rare de devoir, comme ici, faire «varier» une constante, et l'énoncé devra l'indiquer.
- 2** Le degré du polynôme (et éventuellement les coefficients) découle du calcul du déterminant par développement selon les lignes ou, plus rarement, de la formule complète (qui sera vue en Spé). En revanche, l'étude des racines du polynôme passe par celle de l'endomorphisme associé à la matrice, puisqu'il s'agit des cas où ce dernier n'est pas injectif; il est rare de pouvoir, comme ici, se contenter d'une remarque «facile» sur les coefficients de la matrice elle-même. On remarquera aussi qu'il n'est pas possible, par cette méthode, de déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine...
- 3** Ces déterminants sont appelés «déterminants de Vandermonde»; ils interviennent dans la résolution du système $\sum a_k x_i^k = b_i$, qui détermine les coefficients a_k du polynôme prenant pour x_i (donné) la valeur imposée b_i (polynôme d'interpolation de Lagrange).
- 4** D'autres familles de déterminants classiques peuvent ainsi se calculer par récurrence; c'est en particulier le cas de ceux définis par des matrices «presque diagonales»; ainsi, si

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & b & a & b \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix},$$

on montre (en développant selon la première colonne) que $D_n = aD_{n-1} - b^2D_{n-2}$, et on continue l'étude à l'aide d'une récurrence linéaire à deux termes.

Déterminants circulants

Énoncé.

Soit D_3 le déterminant de la matrice $M_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$. Montrer à l'aide de combinaisons de lignes que D_3 est divisible par $a+b+c$ et par $a+bj+cj^2$ (où $j = e^{2i\pi/3}$). En déduire D_3 , puis généraliser cette factorisation à celle de

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Méthode.

- 1 Les transformations élémentaires ne changeant pas le déterminant, il suffit de se rappeler de la «formule»

$$\begin{vmatrix} A & A & A \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

pour voir apparaître la factorisation cherchée.

- 2 Prenant a comme «variable», on remarque que D_3 est un polynôme de degré 3, et qu'il doit y avoir aussi un facteur en $(a+bj^2+cj)$, par exemple; cette remarque n'est pas indispensable pour $n=3$, mais servira ensuite.
- 3 Le cas général nécessite sans doute l'utilisation des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité; la mise en forme d'une démonstration rigoureuse ne passe **pas** par une récurrence (ces racines dépendant de n), mais par une manipulation soignée de sommes, d'une part (pour faire apparaître les facteurs), et d'arguments sur la factorisation de D_n (vu comme un polynôme en a_1).

Solution.

- 1 Utilisant la transformation élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, on obtient

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

si on utilise pour ce second déterminant la transformation $C_1 \leftarrow C_1 + jC_2 + j^2C_3$, où $j = e^{2i\pi/3}$ est une racine cubique de l'unité, vérifiant $j^3 = 1$ et $1+j+j^2 = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} D_3 &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1+j+j^2 & 1 & 1 \\ b+cj+aj^2 & c & a \\ c+aj+bj^2 & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 0(a+bj+cj^2) & 1 & 1 \\ j^2(a+bj+cj^2) & c & a \\ j(a+bj+cj^2) & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+bj+cj^2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ j^2 & c & a \\ j & a & b \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

développant ce dernier déterminant par la formule de Sarrus (par exemple), on obtient finalement $D_3 = -(a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$.

- 2 Montrons d'abord que, dans le cas général, on peut faire apparaître des facteurs de la forme $\sum_{i=1}^n a_i \theta^{i-1}$, où θ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité ($\theta^n = 1$). La transformation élémentaire de lignes $L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^n L_i$ ne changeant pas D_n , il suffit de remarquer que la première ligne devient $(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ avec $b_k = a_k + \theta a_{k+1} + \dots + \theta^{n-1} a_{k-n+1} = \theta^{n-k+1} (a_1 + \theta a_2 + \dots + \theta^{n-1} a_n)^*$; la remarque faite en 1 permet donc de déterminer un facteur de D_n . Soit alors θ' une autre racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité; on aura donc un autre facteur de D_n , $\sum_{i=1}^n a_i \theta'^{i-1}$, distinct du précédent; considérons alors D_n comme fonction de a_1 , on sait que D_n est un polynôme en a_1 , de degré $\leq n$; comme on vient d'en trouver n facteurs distincts (puisqu'il existe n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, $\theta_k = e^{2ik\pi/n}$, $0 \leq k \leq n-1$), on obtient donc une factorisation complète de D_n , à une constante près. La détermination exacte de cette constante est un peu délicate sans la formule complète du déterminant que l'on verra en Spé, mais des essais numériques (ou l'utilisation du cas particulier $a_k = 0$ si $k > 1$) permettent de deviner qu'elle vaut $(-1)^n$; finalement, on obtient, en posant $\theta = e^{2i\pi/n}$ (ce qui donne toutes les autres racines comme des θ^k) :

$$D_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i \theta^{k(i-1)} \right).$$

Remarques.

- 1 La factorisation complète de D_3 peut être obtenue «en force», une fois remarqué l'apparition du facteur $(a + b + c)$; mais seules les transformations élémentaires peuvent faire apparaître d'autres facteurs dans le cas général, et c'est même une des raisons qui amènent à mettre en garde contre «Sarrus» pour ces factorisations.
- 2 Une rédaction parfaitement rigoureuse de la factorisation est presque impossible; il faudrait au minimum introduire la notation $a_k \stackrel{\text{def}}{=} a_{k-n}$ pour $n < k \leq 2n$, et remarquer, bien sûr, qu'on a alors $\theta^p a_p = \theta^q a_q$ si $p = n + q$; tout ceci s'inspire, évidemment, du calcul des restes «modulo n ».
- 3 On a vu dans la fiche précédente (déterminants de Vandermonde) comment utiliser les propriétés des polynômes; des arguments plus abstraits permettent souvent de n'utiliser, comme ici, qu'un cas particulier pour obtenir une constante (qui doit donc, justement, le rester) ou, au contraire, une formule générale (qui, par continuité, doit rester vraie même pour les cas particuliers qu'on n'a pas su étudier).
- 4 L'apparition des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité dans ce genre d'exercice est moins surprenante qu'il n'y paraît : on le comparera, par exemple, à la méthode de calcul de $\sum_{k=0}^n C_n^{kp}$ proposée dans le DM suivant le chapitre 5; ce qui compte, c'est l'existence d'une «permutation circulaire» ne modifiant pas trop les données, car on peut alors «coder» cette permutation par une transformation de la forme $a_k \mapsto \theta a_k$.

* Une rédaction vraiment rigoureuse de cet argument est d'autant plus difficile que les notations de l'énoncé ne sont pas complètement précises elles-mêmes; voir à ce sujet les remarques finales

Famille de plans

Énoncé.

Soit $(\mathcal{P}_t)_{t \in \mathbf{R}}$ la famille de plans définis (dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) par les équations cartésiennes : $M(x, y, z) \in \mathcal{P}_t \iff (t+1)x + (1-t)y + (2t-1)z = 1 + 3t$. Montrer que tous les plans de la famille ont une droite Δ en commun. Réciproquement, tous les plans contenant Δ appartiennent-ils à la famille ?

Méthode.

- 1 *Le plus simple est évidemment de supposer qu'il n'y a pas d'erreur d'énoncé, de déterminer l'intersection de \mathcal{P}_0 et de \mathcal{P}_1 (par exemple), et de montrer que tous les plans \mathcal{P}_t contiennent cette intersection.*
- 2 *Mais on peut aussi faire preuve de plus d'astuce, et s'intéresser au plan \mathcal{Q} d'équation $[x - y + 2z = 3]$; voir à ce sujet les remarques finales.*
- 3 *L'étude de la réciproque demande de construire les équations des plans passant par Δ , et de raisonner par identification, mais cela s'avère un peu délicat si on ne pense pas à déterminer un tel plan par un point non sur Δ (qu'on essaiera de prendre dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , par exemple) ; on remarquera alors que le plan \mathcal{Q} réapparaît dans les calculs (comme exception), mais cela, qui était peut-être prévisible, ne suffit pas à montrer que les autres plans sont tous atteints, et il faudra discuter soigneusement, comme on le fait pour l'étude de l'image d'une fonction quelconque (il s'agit ici de la fonction $t \mapsto \mathcal{P}_t$, allant de \mathbf{R} vers l'ensemble des plans de l'espace contenant Δ !)*

Solution.

- 1 Remarquons d'abord que $\Delta = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1$ est l'ensemble des points vérifiant le système $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$; les deux plans n'étant ni confondus, ni parallèles (puisque les vecteurs «normaux» $(1, 1, -1)$ et $(2, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires), Δ est une droite, contenant (par exemple) les deux points $A = (1, 2, 2)$ et $B = (2, -1, 0)$. Or tout plan \mathcal{P}_t contient également ces deux points, puisque $(t+1).1 + (1-t).2 + (2t-1).2 = 1+3t$ et que $(t+1).2 + (1-t).(-1) + (2t-1).0 = 1+3t$; comme tout plan contient une droite dès qu'il en contient deux points, c'est donc que la droite Δ est commune à tous les plans \mathcal{P}_t .
- 2 Pour étudier la réciproque, déterminons l'équation du plan «général» \mathcal{P} contenant Δ . Un tel plan doit contenir A, B , et un troisième point C quelconque (mais n'appartenant pas à Δ). Comme Δ coupe le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) en B , on peut sans perte de généralité prendre $C = (a, b, 0)$ (avec $(a, b) \neq (2, -1)$). Si $P = (x, y, z) \in \mathcal{P}$, c'est alors que la famille $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ est liée, donc que son déterminant est nul ; ainsi, l'équation cartésienne de \mathcal{P} s'écrira

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & a-2 \\ y+1 & -3 & b+1 \\ z & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(b+1)x - 2(a-2)y + (3a+b-5)z - 2a - 4b = 0.$$

Pour que \mathcal{P} appartienne à la famille, il faut donc qu'il existe un t et une constante k tels que (1) $2k(b+1) = t+1$, (2) $-2k(a-2) = 1-t$, (3) $k(3a+b-5) = 2t-1$

et (4) $k(2a + 4b) = 1 + 3t$. Ce système (où a et b sont des paramètres et k et t les inconnues) se réduit aux deux premières équations, car on voit aisément que (4) $\iff 2 \times (1) - (2)$, et que $2 \times (3) \iff (1) - 3 \times (2)$. Finalement, une résolution par substitution aboutit, si $b \neq a - 3$, à $k = 1/(b - a + 3)$ et $t = (b + a - 1)/(b - a + 3)$, et donc \mathcal{P} appartient alors à la famille; si $b = a - 3$ (avec $a \neq 2$ pour que $(a, b) \neq (2 - 1)$), le plan \mathcal{P} correspondant, d'équation $[2(a - 2)x - 2(a - 2)y + (4a - 8)z - 6a + 12 = 0] \iff [x - y + 2z - 3 = 0]$, ne peut appartenir à la famille, le système correspondant ($k = t + 1$ et $k = t - 1$) n'ayant pas de solution. En résumé, la famille \mathcal{P}_t est formé de tous les plans passant par Δ , à l'exception du plan \mathcal{Q} , d'équation $[x - y + 2z - 3 = 0]$.

Remarques.

- 1 Comme mentionné au début, il s'agit ici de l'étude de l'image d'une application (on peut vérifier aisément que $f : t \mapsto \mathcal{P}_t$ est injective); on relira utilement à ce sujet les remarques de la fiche n° 10
- 2 Ces études de «réciproque» sont en principe aisées, à condition de disposer d'une bonne description de l'ensemble image. C'est précisément ce que l'on veut dire par «interprétation géométrique» du problème : si on n'avait pas pensé à utiliser le point C , une méthode purement algébrique conduisait à prendre l'équation générale de \mathcal{P} ($[ax + by + cz + d = 0]$) et identifier à \mathcal{P}_t en rajoutant les conditions $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, obtenant un système d'équations presque inextricables.
- 3 En fait, il serait beaucoup plus astucieux d'interpréter \mathcal{P}_t comme « $\mathcal{P}_0 + t \cdot \mathcal{Q}$ » (où \mathcal{Q} est le plan d'équation $[x - y + 2z - 3 = 0]$); les différents résultats deviennent alors à peu près évidents, en se laissant guider par des analogies avec le barycentre.
- 4 Et ces analogies sont elles-mêmes conséquence de ce qu'on peut montrer, par exemple, que l'intersection de \mathcal{P}_t avec une droite quelconque de l'espace est effectivement le barycentre (avec coefficients respectifs 1 et t) des deux intersections de cette droite avec les plans \mathcal{P}_0 et \mathcal{Q} ; c'est le début d'une théorie très riche (la géométrie projective), mais largement au-delà du programme.
- 5 Bien d'autres familles paramétriques peuvent être ainsi étudiées; on verra en Spé quelques outils, tirés de l'analyse (des fonctions à plusieurs variables) permettant d'obtenir des résultats plus intéressants, permettant, par exemple de montrer qu'une famille de droites donnée est l'ensemble des tangentes à une certaine courbe, l'enveloppe de la famille.

Le problème de Leibnitz :
utilisation des vecteurs dans un problème métrique.

Énoncé.

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de points de l'espace, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de réels tels que $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, et k une constante. Déterminer l'ensemble \mathcal{S} des points M de l'espace tels que $\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2 = k$ par une méthode analytique, puis en faisant intervenir le barycentre des points A_i (avec coefficients a_i). Que se passe-t-il si $\sum_{i=1}^n a_i = 0$?

Méthode.

- 1 La méthode analytique oblige simplement à rédiger soigneusement ce que des physiciens noteraient $\sum a_i(x_{A_i} - x)^2 + \sum y_{..} + \sum z_{..} = k \Rightarrow \dots \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz = D$, ce qui est l'équation d'une sphère (ou vide si $D < A^2 + B^2 + C^2$; il ne faudra pas oublier cette discussion dans la rédaction finale).
- 2 Mais l'apparition de cette sphère (et la détermination de son centre) ne peut se comprendre géométriquement qu'en introduisant la décomposition vectorielle $A_i M^2 = (\overrightarrow{A_i P} + \overrightarrow{P M})^2 = A_i P^2 + PM^2 + 2\overrightarrow{A_i P} \cdot \overrightarrow{P M}$; on voit alors que pour «éliminer» les produits scalaires, il faut prendre $\sum a_i \overrightarrow{A_i P} = \vec{0}$, d'où le choix de P au barycentre des A_i .
- 3 Quand ce barycentre n'existe pas ($\sum a_i = 0$), on remarque que le problème se simplifie pour donner $\overrightarrow{P M} \cdot \mathbf{u} = \vec{0}$; une analyse géométrique simple (utilisant $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$) montre alors qu'on doit obtenir un plan (orthogonal à \mathbf{u}), ce qu'on pouvait «deviner» en remarquant que si $\sum a_i \simeq 0$, le centre G de la sphère est «rejeté à l'infini».

Solution.

- 1 Notons $(x_{A_i}, y_{A_i}, z_{A_i})$ les coordonnées du point A_i dans un repère orthonormal choisi arbitrairement, et (x, y, z) les coordonnées de M dans ce même repère. On a $A_i M^2 = (x - x_{A_i})^2 + (y - y_{A_i})^2 + (z - z_{A_i})^2$, et donc l'équation cartésienne de \mathcal{S} s'écrit

$$\sum_{i=1}^n a_i ((x - x_{A_i})^2 + (y - y_{A_i})^2 + (z - z_{A_i})^2) = k, \text{ soit}$$

$$(*) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) (x^2 + y^2 + z^2) - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i x_{A_i} \right) x - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i y_{A_i} \right) y - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i z_{A_i} \right) z = k - \sum_{i=1}^n a_i (x_{A_i}^2 + y_{A_i}^2 + z_{A_i}^2);$$

divisant par $\sum_{i=1}^n a_i$ (non nul d'après l'énoncé), et mettant sous forme canonique, on aboutit à

$$\left(x - \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_{A_i}}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)^2 + \left(y - \frac{\sum_{i=1}^n a_i y_{A_i}}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)^2 + \left(z - \frac{\sum_{i=1}^n a_i z_{A_i}}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)^2 = \frac{k - \sum_{i=1}^n a_i (x_{A_i}^2 + y_{A_i}^2 + z_{A_i}^2)}{\sum_{i=1}^n a_i} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_{A_i}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i y_{A_i}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i z_{A_i}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2};$$

on reconnaît, si le second membre K est positif, l'équation d'une sphère de centre $G\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i x_{A_i}}{\sum_{i=1}^n a_i}, \frac{\sum_{i=1}^n a_i y_{A_i}}{\sum_{i=1}^n a_i}, \frac{\sum_{i=1}^n a_i z_{A_i}}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)$ et de rayon \sqrt{K} ; on sait que les coordonnées de G sont celles du barycentre des points A_i (avec coefficients a_i). Si $K = 0$, l'ensemble S se réduit au point G, et S est vide si $K < 0$

2 Pour tout point P, on a $A_i M^2 = (\overrightarrow{A_i P} + \overrightarrow{P M})^2 = A_i P^2 + P M^2 + 2\overrightarrow{A_i P} \cdot \overrightarrow{P M}$; on voit donc que $M \in S \iff \sum_{i=1}^n a_i A_i P^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) P M^2 + 2\overrightarrow{P M} \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{A_i P}\right) = k$.

Choisisant P au barycentre G des A_i , avec coefficients a_i , on sait que $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{A_i G} = \vec{0}$, donc $M \in S \iff \sum_{i=1}^n a_i A_i G^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) G M^2 = k$. Si $K = (k - \sum_{i=1}^n a_i A_i G^2) / \sum_{i=1}^n a_i$

est positif, ceci est l'équation d'une sphère de centre G et de rayon \sqrt{K} ; on retrouve donc bien ainsi les résultats de 1.

3 Si, dans l'équation (*) obtenue en 1, on pose $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, on obtient

$$(**) -2\left(\sum_{i=1}^n a_i x_{A_i}\right)x - 2\left(\sum_{i=1}^n a_i y_{A_i}\right)y - 2\left(\sum_{i=1}^n a_i z_{A_i}\right)z = k - \sum_{i=1}^n a_i (x_{A_i}^2 + y_{A_i}^2 + z_{A_i}^2);$$

on sait que ceci est l'équation d'un plan. La formule de 2 reste valable bien qu'il n'existe plus de barycentre, mais cette fois ce sont les termes en $M P^2$ qui disparaissent, et on obtient $M \in S \iff \overrightarrow{P M} \cdot \mathbf{u} = K$, où \mathbf{u} est le vecteur (ne dépendant pas de M) $2 \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{A_i P}$ et $K = k - \sum_{i=1}^n a_i A_i P^2$. Or on sait que $\overrightarrow{P M} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \cdot \overline{P H}$, où H est la projection orthogonale de M sur l'axe (P, \mathbf{u}); on en déduit que S est le plan orthogonal à cet axe, passant par le point H' tel que $\overline{P H'} = K / \|\mathbf{u}\|$ (le vecteur \mathbf{u} ne saurait être nul, car alors P serait barycentre des points A_i , ce qui est absurde).

Remarques.

1 Cette technique de «décomposition» intervient dans de nombreuses «identités» faisant intervenir le produit scalaire, telles que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, ou (cas particulier de la formule de Leibnitz) l'identité de la médiane : Si AM est médiane du triangle ABC, $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + BC^2/4$.

2 Tout se passe comme si le barycentre «se trouvait à l'infini» quand $\sum a_i = 0$; on se convaincra que ce n'est pas déraisonnable en examinant comment varient les coordonnées de G quand $\sum a_i \rightarrow 0 \dots$

Distance de deux droites

Énoncé.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on appelle (D) la droite (O, \vec{i}) , et Δ la droite passant par $A : (0, 1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ (avec $b^2 + c^2 \neq 0$). Déterminer la distance de D à Δ :

- a) en étudiant la distance d'un point quelconque de Δ à (D) ;
- b) par une construction «géométrique» de la perpendiculaire commune.

Méthode.

- 1 La distance de deux droites étant le minimum de la distance d'un point de l'une à l'autre, il suffit de calculer cette distance $d(t)$ comme fonction de t , où t est un paramètre décrivant l'une des droites, puis de calculer le minimum de cette fonction (en résolvant $d'(t) = 0$; on pensera à alléger le calcul en dérivant plutôt $(d(t))^2$).
- 2 Ici, on remarquera que la projection orthogonale de $P : (x, y, z)$ sur (D) est le point $P_0 : (x, 0, 0)$; on utilisera donc le point général $P(t)$ de Δ , sachant qu'on doit avoir $\overrightarrow{AP(t)} = t\vec{d}$, et $d(t)$ sera $P_0(t)P(t) = \|\overrightarrow{P_0P}\| = \sqrt{\overrightarrow{P_0P}^2}$.
- 3 Géométriquement, la distance correspond à IJ , où I et J sont les points où le minimum est atteint; on sait que J est la projection orthogonale de I sur (D) et que I est la projection orthogonale de J sur Δ , donc que (IJ) est la perpendiculaire commune à (D) et Δ . Il faut donc en construire l'équation; sa direction est donnée par un produit vectoriel, mais trouver l'un des deux points I ou J n'est pas si facile; on remarquera que le plan $((D), (IJ))$ (par exemple) a un vecteur normal facile à déterminer, et qu'il passe par l'origine; son équation cartésienne en résulte, et il est alors aisé d'obtenir les coordonnées de I , intersection de ce plan avec Δ .

Solution.

- 1 Soit $M(t)$ le point de Δ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{d}$. On a donc $M(t) : (at, 1 + bt, 1 + ct)$, et la distance de $M(t)$ à (D) est $\delta(t) = \sqrt{(1 + bt)^2 + (1 + ct)^2}$, car la projection orthogonale de $M(t)$ sur (D) a pour coordonnées $(at, 0, 0)$, comme on le vérifie aisément. Ainsi, le minimum de $(\delta(t))^2$ est atteint pour $(\delta^2(t))' = 2b(1 + bt) + 2c(1 + ct) = 0$, donc pour $t = t_0 = -\frac{b+c}{b^2+c^2}$, et ce minimum vaut

$$\begin{aligned} \delta(t_0) &= \sqrt{\left(1 - b\frac{b+c}{b^2+c^2}\right)^2 + \left(1 - c\frac{b+c}{b^2+c^2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(c^2 - bc)^2 + (b^2 - bc)^2}}{b^2 + c^2} \\ &= \frac{|b-c|}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

- 2 Si I et J sont les points correspondant au minimum de la distance entre (D) et Δ , c'est donc que J , par exemple, est la projection orthogonale de I sur Δ , et que la

droite (II) est perpendiculaire commune à (D) et Δ . Appelons (P) cette droite. (P) étant orthogonale à \vec{v} et \vec{d} , a pour vecteur directeur $\vec{p} = \vec{d} \wedge \vec{v}$, donc $\vec{p} = c\vec{j} - b\vec{k}$. Le plan passant par (P) et Δ a donc pour vecteur normal $\vec{n}_1 = \vec{p} \wedge \vec{d} = (b^2 + c^2)\vec{v} - bc\vec{j} - ac\vec{k}$, et est donc d'équation cartésienne $(b^2 + c^2)X - bcY - acZ = h$; comme il passe par A, on doit avoir $h = -bc - ac$. Ainsi, ce plan coupe (D) en $I = \left(\frac{-bc - ac}{b^2 + c^2}, 0, 0\right)$, et la perpendiculaire commune est la droite (I, \vec{p}). De même, le plan passant par (P) et (D) a pour vecteur normal $\vec{n}_2 = \vec{p} \wedge \vec{v} = -b\vec{j} - c\vec{k}$, et est donc d'équation cartésienne $-bY - cZ = 0$, puisqu'il contient l'origine. Ce plan coupe Δ en $J : (x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{AJ} = k\vec{d}$, c'est-à-dire que $-by - cz = 0$, $x = ka$, $y = 1 + kb$ et $z = 1 + kc$, d'où $k = -(b + c)/(b^2 + c^2)$ (on voit qu'on retrouve ainsi la valeur t_0). Finalement, la distance cherchée est donc $IJ = \sqrt{(x_I - x_J)^2 + (y_I - y_J)^2 + (z_I - z_J)^2} = \sqrt{y_J^2 + z_J^2}$; on retrouve bien la valeur $|b - c|/\sqrt{b^2 + c^2}$ obtenue en 1.

Remarques.

- 1 L'énoncé précisait que $b^2 + c^2 \neq 0$, donc que $(b, c) \neq (0, 0)$, ce qui revient à dire que Δ n'est pas parallèle à (D); dans le cas contraire, il n'y a plus unicité de la perpendiculaire commune, mais en revanche la distance est alors obtenue (beaucoup plus simplement) comme la distance de A à (D), c'est-à-dire $\sqrt{2}$.
- 2 Dans le cas de deux droites arbitraires, il serait possible d'étudier directement le minimum de la fonction $d(t, u)$ correspondant aux paramétrages des deux droites; on sait, d'après le cours de Physique, que cela revient à résoudre $\frac{\partial d(t, u)}{\partial t} = \frac{\partial d(t, u)}{\partial u} = 0$ (ce que l'on montrera en Spé).
- 3 De même, un calcul différentiel direct sur les vecteurs \overrightarrow{PQ} (avec P fixé et Q appartenant à Δ) montre que le minimum de la distance (correspondant à $\|\overrightarrow{PQ}(t)\|$ minimal) est obtenu quand $(\overrightarrow{PQ}(t) \cdot \overrightarrow{PQ}(t))' = 2\overrightarrow{PQ}(t) \cdot \overrightarrow{PQ}'(t) = 0$, et donc quand \overrightarrow{PQ} est orthogonal à \overrightarrow{PQ}' , donc à Δ .

**Angle d'une droite et d'un plan :
choix d'un repère.**
Énoncé.

Soit \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux plans sécants non orthogonaux; montrer, à l'aide d'une mise en équation dans un repère bien choisi, que l'angle d'une droite D de \mathcal{Q} et de sa projection orthogonale sur \mathcal{P} est maximal lorsque $D \perp (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$.

Méthode.

- 1 *Autant que possible, il convient de faire une figure (même «fausse») pour aborder ce genre de problème; on pourra constater ainsi que le choix d'un repère contenant la droite $I = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ et deux de ses perpendiculaires s'impose. . .*
- 2 *Des cas particuliers apparaissent souvent à ce stade de l'étude (ici, le cas D parallèle à I); on les traitera à part, avant d'aborder le cas général.*
- 3 *Le «paramétrage» du problème reste délicat : la droite D ne peut être choisie comme axe de repère (sinon, celui-ci ne serait pas orthonormé, ce qui rendrait les calculs inextricables); on aura intérêt à réfléchir aux angles intervenant dans la figure, et à utiliser les coordonnées cylindriques ou sphériques.*
- 4 *Pour conclure, après avoir calculé l'angle cherché en fonction de celui utilisé pour définir la position de D sous la forme $\theta = f(\alpha)$, il ne restera plus, éventuellement, qu'à faire une étude des variations de la fonction f .*

Solution.

- 1 Remarquons d'abord que si D est parallèle à $I = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, la projection orthogonale de D sur \mathcal{P} est elle aussi parallèle à I , et l'angle cherché est donc nul, et ne saurait être maximal. . . Supposons donc $D \cap I = \{O\}$, et construisons un repère orthonormé d'origine O , d'axe (Ox) porté par I , tel que $(Oy) \subset \mathcal{P}$. Il en existe 8; choisissons l'un d'eux $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que l'intersection de \mathcal{Q} et du plan (O, \vec{j}, \vec{k}) soit dans les premier et troisième quadrants de ce plan. Dans le repère ainsi défini, cette droite ($D_2 = \mathcal{Q} \cap (Oy, Oz)$) forme donc avec Oy , sa projection orthogonale sur \mathcal{P} , un angle θ_0 tel que $0 < \theta_0 < \pi/2$. D'autre part, on peut prendre (O, \vec{i}, \vec{u}) pour repère de \mathcal{Q} , où \vec{u} est un vecteur unitaire de D_2 situé dans le premier quadrant du plan (O, \vec{j}, \vec{k}) , et alors, un vecteur unitaire de D peut s'écrire $\vec{d} = (\cos \alpha) \vec{i} + (\sin \alpha) \vec{u}$, où α est donc l'angle formé par I et D (ou plus précisément par \vec{i} et \vec{d}).
- 2 Dans ce repère, il est facile de déterminer les coordonnées des différents vecteurs : tout d'abord, on a $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix}$, donc $\vec{d} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \theta_0 \\ \sin \alpha \sin \theta_0 \end{pmatrix}$. Or la projection orthogonale d'un vecteur $\vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$ sur le plan (vectoriel)

$\langle \vec{v}, \vec{j} \rangle$ est évidemment $\vec{v}_0 = a \vec{v} + b \vec{j}$ (puisque $\vec{v} - \vec{v}_0 = c \vec{k}$); ici, un vecteur directeur (non unitaire) de D_0 , projection orthogonale de D sur \mathcal{P} , est donc $\vec{d}_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}$; et l'angle θ entre D et D_0 vérifie donc

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{d} \cdot \vec{d}_0}{\|\vec{d}\| \|\vec{d}_0\|} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_0}{1 \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_0}} \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_0} = \|\vec{d}_0\|; \end{aligned}$$

ce résultat était d'ailleurs «géométriquement évident», car \vec{d} étant choisi comme vecteur unitaire, et \vec{d}_0 étant sa projection orthogonale, on avait $\|\vec{d}_0\| = \|\vec{d}\| \cdot \cos(\widehat{(\vec{d}_0, \vec{d})}) \dots$

- 3 Ainsi, $\theta = f(\alpha) = \text{Arc cos}(\sqrt{\cos^2 \theta_0 + \cos^2 \alpha(1 - \cos^2 \theta_0)})$; \cos étant décroissante et Arccos l'étant également, il est clair que $f(\alpha)$ sera maximale pour $\alpha = \pi/2$, c'est-à-dire pour D confondue avec D_2 .

Remarques.

- 1 *Le choix patient d'orientation du repère s'avère finalement ici non nécessaire, mais on l'a gardé dans la rédaction pour montrer comment faire intervenir le signe des angles dans d'autres problèmes du même type; de même, le calcul de $\cos \theta$ aurait pu être simplifié par la remarque géométrique concernant \vec{d}_0 ...*
- 2 *On réfléchira utilement à la relation entre les coordonnées du vecteur \vec{d} et les coordonnées sphériques du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{d}$; quel est le «repère» sphérique utilisé?*
- 3 *La même technique peut être utilisé pour obtenir la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique; cette fois, il convient de repérer de même une droite D' du plan \mathcal{P} , et d'obtenir l'angle du plan (D, D') avec le plan P , par exemple, en utilisant l'angle des vecteurs normaux \vec{k} et $\vec{n} = \vec{d} \wedge \vec{d}'$.*
- 4 *Des arguments géométriques plus intuitifs expliquent souvent ces résultats de maximalité (ou de minimalité), comme on l'a vu au chapitre 9; ainsi, la distance minimale entre deux points sur une sphère est obtenu en suivant un arc de grand cercle (intersection de la sphère et d'un plan passant par son centre), comme on s'en convainc aisément par un argument de courbure; le résultat correspondant sur les angles ($\alpha < \beta \cos \theta$, avec des notations que le lecteur pourra tenter de reconstituer) est loin d'être évident...*

**Paramétrage d'une conique
par des fractions rationnelles**
Énoncé.

Soit \mathcal{C} la courbe dont les équations paramétriques (dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})) sont

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \frac{4t - 5}{2t^2 - 2} \end{cases} .$$

Déterminer l'allure de \mathcal{C} (on précisera les branches infinies et le point limite). Montrer (par identification) que \mathcal{C} est une conique, dont on précisera la nature.

Méthode.

- 1 *Après avoir vérifié qu'on ne peut pas simplifier l'étude par des symétries évidentes, il ne reste plus qu'à dresser le tableau des variations des deux fonctions x et y ; même si, comme c'est le cas ici, les calculs se simplifient, il faudra se montrer minutieux, une erreur à ce stade étant très difficilement repérable par la suite...*
- 2 *Les branches infinies relèvent de la même méthode que pour les études de fonctions à une variable; ainsi, on déterminera successivement $a = \lim_{t \rightarrow 1^+} y(t)/x(t)$, puis (si a est fini) $b = \lim_{t \rightarrow 1^+} y(t) - ax(t)$, obtenant ainsi l'asymptote oblique $Y = aX + b$. De même, on aura la direction de la tangente au point limite (x_0, y_0) en déterminant la limite (en $+\infty$) de $(y(t) - y_0)/(x(t) - x_0)$.*
- 3 *On peut deviner, compte tenu du tracé obtenu, que \mathcal{C} est une hyperbole; pour le démontrer, il suffit de raisonner par identification, en montrant qu'on peut trouver 6 constantes A, B, C, D, E et F telles que (pour tout t) l'on ait $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (et en remarquant que les seules coniques possédant deux asymptotes sont les hyperboles), mais cela prouve seulement que la trajectoire \mathcal{C} a pour support l'hyperbole \mathcal{H} que l'on vient de déterminer (et d'ailleurs, le point limite appartient à \mathcal{H} et pas à \mathcal{C}); il est en fait assez laborieux de contrôler que tous les autres points sont atteints, et on peut penser que l'énoncé ne le demandait pas...*

Solution.

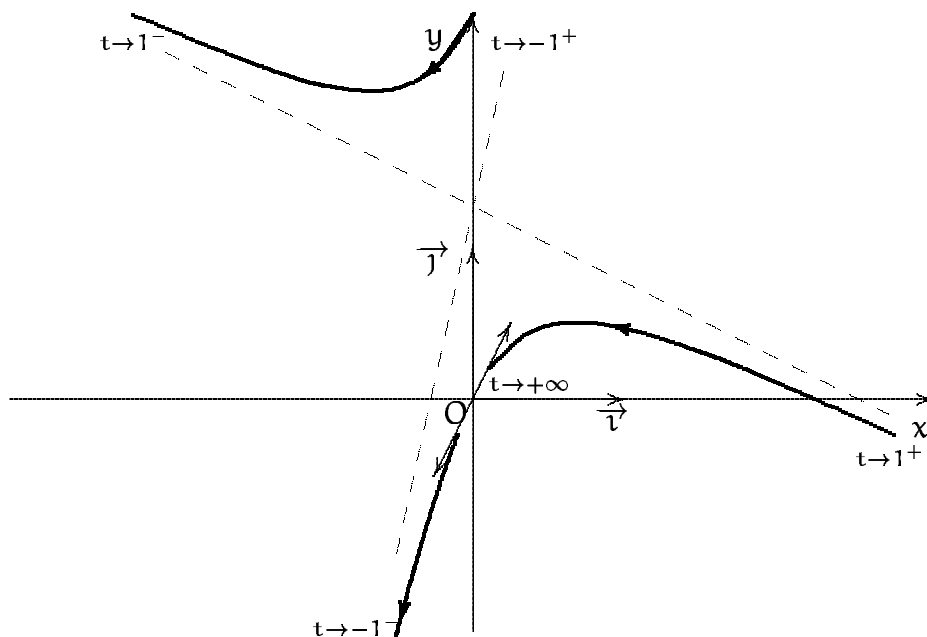
- 1 Sur le domaine de définition ($t \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$), on a $x'(t) = \frac{-t^2 - 1}{(t^2 - 1)^2}$ toujours négatif, et $y'(t) = \frac{-(2t^2 - 5t + 2)}{(t^2 - 1)^2}$; on peut donc dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$1/2$	1	2	$+\infty$
$x'(t)$	-	-	-	-	-	-
$x(t)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -2/3 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow 2/3 \rightarrow 0$		
$y(t)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 2 \rightarrow +\infty$		$+\infty \rightarrow 1/2 \rightarrow 0$		
$y'(t)$	-	-	0	+	+	0

Déterminons les branches infinies : au voisinage de -1 , par exemple, on a

$$\lim_{t \rightarrow -1} y(t)/x(t) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{4t-5}{2t} = 9/2, \text{ et } \lim_{t \rightarrow -1} y(t) - 9x(t)/2 = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{-5t-5}{2t^2-2} = 5/4,$$

ce qui montre que la droite d'équation $[Y = 9X/2 + 5/4]$ est asymptote oblique à C (la courbe est en fait composée de deux « arcs paramétrés », et la même droite est asymptote des deux « côtés »). De même, au voisinage de 1 , la droite d'équation $[Y = -X/2 + 5/4]$ est aussi asymptote oblique. Enfin, quand t tend vers $\pm\infty$, la courbe a pour point limite l'origine O ; comme $\lim_{|t| \rightarrow \infty} y(t)/x(t) = 2$, on en déduit que la droite $[Y = 2X]$ est tangente à C en O (ou plus précisément, au prolongement de C « par continuité »). On a donc le tracé suivant :



Cette courbe semble correspondre à une conique : déterminons-la par identification. Si, pour tout t ($\notin \{-1, 1\}$), le point $(x(t), y(t))$ appartient à la conique d'équation cartésienne $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, c'est que $4At^2 + 2Bt(4t-5) + C(4t-5)^2 + 2Dt(t^2-1) + E(t^2-1) + 4F(t^2-1)^2$ est le polynôme nul (puisque'il s'annule pour une infinité de valeurs de t). On en déduit qu'on doit avoir $F = 0$, et que les autres constantes doivent vérifier le système

$$\begin{cases} 2E + D = 0 & (\text{terme en } t^3) \\ A - 5E/2 + 2B + 4C = 0 & (\text{terme en } t^2) \\ -10C - 5B/2 - 2E - D = 0 & (\text{terme en } t) \\ 25C/4 + 5E/2 = 0 & (\text{terme constant}) \end{cases} ; \text{ on obtient (à une constante de proportionnalité près) } A = -9/4, B = -4, C = 1, D = 5 \text{ et } E = -5/2; C \text{ est donc}$$

une partie de la conique \mathcal{H} d'équation (implicite) : $-9X^2 - 16XY + 4Y^2 + 20X - 10Y = 0$, et on sait que \mathcal{H} est une hyperbole, puisque ce sont les seules coniques qui admettent des asymptotes. \mathcal{H} n'est pas entièrement parcourue, puisque O appartient à \mathcal{H} et pas à \mathcal{C} ; un calcul plus complet montrerait que O est le seul point non atteint.

Remarques.

- 1 *La position de la courbe par rapport aux asymptotes (ou aux tangentes) se détermine (comme pour les graphes de fonctions) par l'étude du signe de $y(t) - (ax(t) + b)$; on a vu que l'utilisation de développements limités facilite souvent ce calcul.*
- 2 *Le fait que l'origine soit un point régulier n'est pas accidentel : considérons le changement de variable $T = 1/t$; on obtient alors la courbe paramétrée \mathcal{C}' d'équations $x(T) = \frac{T}{1 - T^2}$; $y(T) = \frac{4 - 5T}{2 - 2T^2}$, qui est régulière en $T = 0$. . .*
- 3 *La conique obtenue peut facilement ici être caractérisée géométriquement : c'est une hyperbole, de centre l'intersection des asymptotes (le point $C(0, 5/4)$) et d'axes les bissectrices des asymptotes (dont l'angle α donnerait aussi le rapport $b/a = \text{Arc tg } \alpha/2$). La situation serait loin d'être aussi simple si on avait obtenu l'équation d'une ellipse; la méthode générale de réduction des coniques qui sera vue en Spé deviendrait alors nécessaire.*
- 4 *La méthode d'identification utilisée ici (qui est aussi une méthode d'élimination du paramètre t) s'applique bien pour toutes les courbes de la forme $(x(t), y(t))$ où x et y sont des fractions rationnelles de t (ces courbes sont dites *unicursales*). Il faudrait, pour l'appliquer dans le cas général, anticiper le degré du polynôme cherché (en fonction des degrés de x et y); c'est le début d'une théorie plus générale encore que celle mentionnée à la fiche 37, la géométrie algébrique*
- 5 *Les calculs demandés par cette étude sont délicats, mais faisables même dans le cadre d'un exercice d'oral. Mais on pourrait aussi proposer un exercice de ce type comme exemple d'application de l'outil informatique; on essaiera ainsi, par exemple, de déterminer la démarche à suivre, à l'aide de Maple, pour vérifier que $\mathcal{C} = \mathcal{H} - \{O\}$. . .*

Composition de rotations

Énoncé.

Soit, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, r_1 la rotation d'axe (O, \vec{i}) et d'angle α , et r_2 la rotation d'axe (O, \vec{j}) et d'angle β (avec $\alpha\beta \neq 0$). Déterminer analytiquement la nature de la transformation $r_2 \circ r_1$, puis montrer qu'on peut retrouver «géométriquement» le résultat obtenu, en décomposant r_1 et r_2 en symétries planes bien choisies.

Méthode.

- 1 On utilise d'abord le cours pour montrer que $r_2 \circ r_1$ est une rotation (affine). Les rotations r_1 et r_2 ayant l'origine comme point fixe, il est plus facile de calculer à l'aide des rotations vectorielles associées, puis de multiplier les matrices obtenues; l'axe sera le sous-espace propre des vecteurs invariants, et l'angle sera obtenu en calculant à partir d'un vecteur orthogonal à l'axe.
- 2 Le fait qu'un produit de symétries soit une rotation n'est plus au programme, et il faut savoir le redémontrer : c'est une conséquence facile de la classification des isométries à points fixes, mais la valeur exacte de l'angle de rotation demande un raisonnement (simple) dans le plan orthogonal aux plans de symétrie.
- 3 On peut donc représenter r_1 et r_2 en utilisant quatre plans; prenant deux fois le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , il va s'éliminer et on obtiendra la rotation «associée» aux deux autres plans.

Solution.

- 1 On sait que le produit de deux déplacements est un déplacement (en raisonnant par conservation des distances et des orientations); or le déplacement $r = r_2 \circ r_1$ admet l'origine pour point fixe; c'est donc une rotation dont l'axe passe par O . Cherchons la rotation vectorielle associée $\vec{r} = \vec{r}_2 \circ \vec{r}_1$; elle a pour matrice représentative $M = M_2 M_1$ (où M_1 et M_2 sont les matrices associées à \vec{r}_1 et \vec{r}_2 respectivement). Or, raisonnant dans les plans (vectoriel) $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{k})$ et $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$, on voit que

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

(le seul point un peu délicat est le signe des coefficients de M_2 ; on remarque que le vecteur \vec{k} tourne de l'angle β dans le repère (\vec{k}, \vec{i}) , et que son image est

donc $\cos \beta \vec{k} + \sin \beta \vec{i}$). Ainsi, $M = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}$ (on

peut vérifier, mais la remarque initiale montre que ce n'est pas nécessaire, que M est bien une matrice orthogonale de déterminant 1). L'application linéaire \vec{r} est donc une rotation vectorielle ayant pour axe la droite (vectorielle) des vecteurs invariants \mathbf{u} (vérifiant $\vec{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$); le calcul (revenant à déterminer $\text{Ker}(\vec{r} - \text{Id})$) donne :

$$\mathbf{u} = (X, Y, Z) \iff \begin{cases} (\cos \beta - 1)X + \sin \alpha \sin \beta Y + \cos \alpha \sin \beta Z = 0 \\ (\cos \alpha - 1)Y - \sin \alpha Z = 0 \end{cases}$$

(en effet, la troisième équation est combinaison linéaire des deux premières si β est non nul, puisque $\det(M-I) = 0$). Substituant, on obtient $\mathbf{u} = Z\left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta - 1}, \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 1}, 1\right)$; si l'on représente l'axe de la rotation r par $(O, \mathbf{u}_1) = \left(O, \left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta - 1}, \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 1}, 1\right)\right)$, il ne reste plus qu'à déterminer son angle; pour cela, choisissons un vecteur orthogonal à \mathbf{u}_1 , par exemple $\mathbf{v} = \left(0, 1, \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)$. L'angle de la rotation est l'angle $\gamma = (\mathbf{v}, \widehat{\vec{r}}(\mathbf{v}))$; ainsi on aura $\cos \gamma = \mathbf{v} \cdot \vec{r}(\mathbf{v}) / \|\mathbf{v}\|^2$, et le signe de γ sera donné par le signe de k , avec $\mathbf{v} \wedge \vec{r}(\mathbf{v}) = k\mathbf{u}_1$. Comme $\vec{r}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\sin \alpha \sin \beta}{1 - \cos \alpha}, -1, \frac{\cos \alpha \cos \beta}{1 - \cos \alpha}\right)$, on en déduit que $\cos \gamma = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)}{2} - 1$, et que $k = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha - 1}$; l'angle γ est donc du signe de $-\sin \alpha \sin \beta$.

- 2** Montrons que le composé de deux symétries planes (où les plans se coupent) est une rotation : en effet, c'est un déplacement (puisqu'il est composé de deux antidéplacements), ayant pour ensemble de points fixes la droite d'intersection des deux plans; se plaçant dans un plan orthogonal à cette droite, on voit que l'angle de la rotation est le double de l'angle de ces plans. Réciproquement, on peut représenter r_1 par le composé $s_2 \circ s_1$, et r_2 par le composé $s_4 \circ s_3$, où les s_i sont des symétries (orthogonales) par des plans passant respectivement par (O, \vec{v}) et (O, \vec{j}) , et faisant entre eux des angles de $\alpha/2$ et $\beta/2$. Choisisant $s_2 = s_3$, ce qui implique que le plan $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$ soit le plan (O, \vec{v}, \vec{j}) , on aura $r_2 \circ r_1 = (s_4 \circ s_2) \circ (s_2 \circ s_1) = s_4 \circ s_1$, par associativité de la composition. Ainsi, r sera la rotation ayant pour axe l'intersection des deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_4 , et pour angle le double de l'angle de ces plans; il ne reste donc qu'à les déterminer. Utilisant leurs vecteurs normaux \vec{n}_1 et \vec{n}_4 , il est clair qu'on doit avoir $\vec{n}_1 \in \text{Vect}(\vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{k}, \vec{n}_1) = -\alpha/2$, et de même $\vec{n}_4 \in \text{Vect}(\vec{v}, \vec{k})$ et $(\vec{k}, \vec{n}_4) = \beta/2$, d'où, par exemple, les équations cartésiennes de $\mathcal{P}_1 : \cos(\alpha/2)Y - \sin(\alpha/2)Z = 0$ et de $\mathcal{P}_4 : \cos(\beta/2)X + \sin(\beta/2)Z = 0$. La direction d'intersection des deux plans est le vecteur $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_4$, et leur angle est l'angle (\vec{n}_1, \vec{n}_4) ; un calcul patient (et qui a été refait à l'aide de Maple) montre qu'on retrouve ainsi les résultats de 1.

Remarques.

- 1 On remarquera au passage que M_1 et M_2 ne commutent pas, ce qui montre que le groupe des rotations vectorielles n'est pas abélien, contrairement au sous-groupe des rotations d'axe (O, \vec{v}) , par exemple.
- 2 La mise en place des matrices M_1 et M_2 n'a été qu'esquissée; il conviendrait, surtout à l'oral, de l'établir soigneusement, en revenant aux définitions, c'est-à-dire en déterminant les images de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par les rotations \vec{r}_1 et \vec{r}_2 , au besoin en raisonnant par restriction aux sous-espaces vectoriels invariants.
- 3 Les calculs que réclame ce genre d'exercice ne sauraient raisonnablement être exigibles à l'oral (et même dans une épreuve écrite non spécialisée), du moins pour des valeurs arbitraires des angles α et β . Il faut donc supposer qu'on s'autorise, comme le laisse sous-entendre la rédaction de la solution, à ne donner que la démarche générale, et à utiliser un logiciel de calcul formel pour obtenir les résultats demandés et les simplifier; on prendra soin en revanche, dans cette éventualité, d'étudier les cas particuliers qui apparaissent (ici, les divisions par $1 - \cos a$), et à contrôler que les calculs ne conduisent pas à des impossibilités : il serait regrettable par exemple d'aboutir à $\cos \gamma < -1$...

**Propriétés géométriques
d'une hypocycloïde**

Énoncé.

Soit \mathcal{H} la courbe dont les équations paramétriques (dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})) sont $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \sin 2t \\ y(t) = 2 \sin t + \cos 2t \end{cases}$. Déterminer l'allure de \mathcal{H} (on précisera la nature des points singuliers). Montrer que \mathcal{H} est invariant par symétrie par rapport à l'axe Oy , et par rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$.

Méthode.

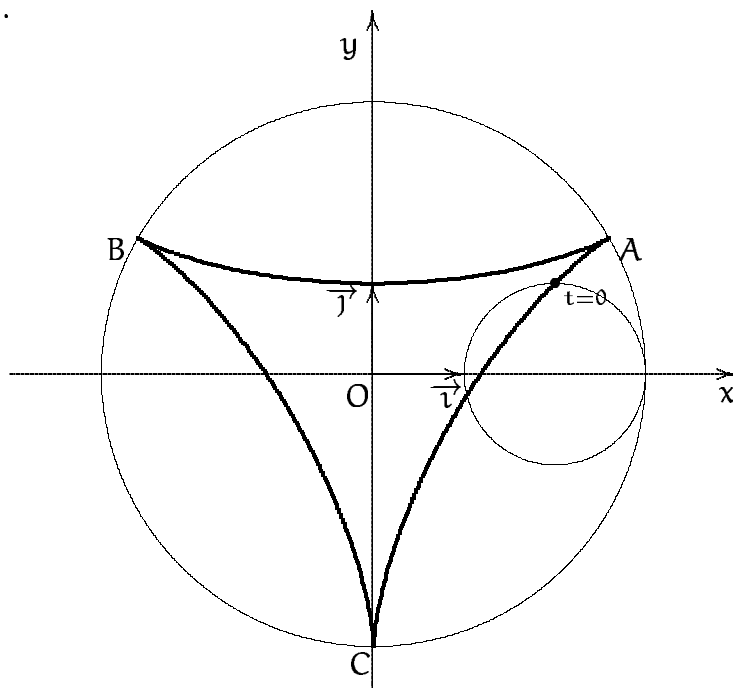
- 1 *Le paramétrage est évidemment périodique (de période 2π). Après avoir vérifié qu'on ne peut pas simplifier davantage l'étude par des symétries évidentes, on va dresser le tableau des variations des deux fonctions x et y (sur l'intervalle $[0, 2\pi]$).*
- 2 *Les points singulier sont ceux où $x'(t) = y'(t) = 0$; on sait qu'il faut, pour déterminer la tangente en ces points calculer le vecteur $(x''(t), y''(t))$; la nature exacte de ces points demandera aussi un calcul du vecteur $(x'''(t), y'''(t))$ (quoique l'étude de symétrie qui suit rend le résultat de ce calcul prévisible)*
- 3 *Prouver la symétrie de la courbe par rapport à Oy demanderait, en théorie, de montrer que $\forall t_1, \exists t_2, x(t_1) = -x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. Mais ici, un tracé préliminaire (ou l'étude des variations) permet de voir qu'il faudra prendre $t_2 = \pi - t_1$. De même, on montrera que l'image du point M_t par la rotation de $+2\pi/3$ (que l'on obtiendra en utilisant les formules matricielles de rotation) est le point $M_{2\pi/3}$.*

Solution.

1 La fonction $t \mapsto M_t : ((x(t), y(t)))$ est 2π -périodique, puisque les deux fonctions x et y le sont. Sur l'intervalle d'étude ($t \in [0, 2\pi]$), on a $x'(t) = -2(\sin t - \cos 2t) = -2(\sin t + 2 \sin^2 t - 1) = 2(1 - 2 \sin t)(1 + \sin t)$, et $y'(t) = 2(\cos t - \sin 2t) = 2 \cos t(1 - 2 \sin t)$; on peut donc dresser le tableau de variation suivant :

x	0	π/6	π/2	5π/6	3π/2	2π
$1 - 2 \sin t$	+	0	-	-	0	+
$x'(t)$	+	0	-	-	0	+
$x(t)$	2	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	2
$y(t)$	1	3/2	1	3/2	-3	1
$y'(t)$	+	0	-	0	+	0
$\cos t$	+	+	0	-	-	0

Tous les points de la courbe sont réguliers (c'est-à-dire que $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$) à l'exception des trois points A, B et C de paramètres respectifs $\pi/6$, $5\pi/6$ et $3\pi/2$. Étudions par exemple le point C : $(0, -3)$ correspondant à $t = 3\pi/2$. En ce point, on a $x''(t) = -2(\cos t + 2 \sin 2t) = 0$, et $y''(t) = -2(\sin t + 2 \cos 2t) = 6$; on voit donc que la courbe possède une tangente verticale. Comme on a $x'''(t) = 2(\sin t - 4 \cos 2t) = 6$, et $y'''(t) = -2(\cos t - 4 \sin 2t) = 0$, on voit que les deux vecteurs correspondants forment une base (d'ailleurs orthogonale); la classification donnée dans le cours montre donc que C est un point de rebroussement de première espèce. La stabilité par rotation qui sera démontrée au prochain paragraphe permet d'en déduire qu'il en va de même de A et de B.



- 2 Le tableau de variation permet de penser que les points de paramètres t et $\pi - t$ sont symétriques par rapport à Oy . De fait, $x(\pi - t) = 2 \cos(\pi - t) + \sin(2\pi - 2t) = -2 \cos t - \sin 2t = -x(t)$, et $y(\pi - t) = 2 \sin(\pi - t) + \cos(2\pi - 2t) = 2 \cos t + \sin 2t = y(t)$; la courbe \mathcal{H} est donc bien symétrique (on remarquera qu'il faut prendre $t \in \mathbf{R}$, le domaine d'étude choisi n'étant pas symétrique autour de $\pi/2$). Soit r la rotation de centre O et d'angle $+2\pi/3$. On sait qu'elle a pour matrice représentative $R = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \mapsto r(M) \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Les valeurs de t correspondant à A, B et C amènent à penser que $M_{t+2\pi/3} = r(M_t)$; il suffit donc de vérifier que $x(t+2\pi/3) = -x(t)/2 - y(t)\sqrt{3}/2$ et que $y(t+2\pi/3) = x(t)\sqrt{3}/2 - y(t)/2$, or on a (formules d'addition des angles) $x(t+2\pi/3) = 2 \cos(t + 2\pi/3) + \sin(2t + 4\pi/3) = -\cos t - \sqrt{3} \sin t - (\sin 2t)/2 - \sqrt{3}(\cos 2t)/2$ et $-x(t)/2 - y(t)\sqrt{3}/2 = -\cos t - (\sin 2t)/2 - \sqrt{3} \sin t - \sqrt{3}(\cos 2t)/2$; de même $y(t+2\pi/3) = 2 \sin(t + 2\pi/3) + \cos(2t + 4\pi/3) = -\sin t + \sqrt{3} \cos t - (\cos 2t)/2 + \sqrt{3}(\sin 2t)/2$ et $x(t)\sqrt{3}/2 - y(t)/2 = \sqrt{3} \cos t + \sqrt{3}(\sin 2t)/2 - \sin t - (\cos 2t)/2$.

Remarques.

- 1 Si on n'avait pas deviné sur le graphe les relations à chercher entre t_1 et t_2 pour que M_{t_1} et M_{t_2} soient symétriques, par exemple, il aurait fallu exploiter (comme pour l'étude d'une symétrie de fonctions) les points remarquables du graphe; ici, les points de rebroussements A et B sont symétriques par rapport à Oy .

- 2** Les équations paramétriques de cette courbe viennent en fait de la mécanique : il s'agit en effet de la trajectoire d'un point situé sur un cercle de rayon 1, qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon 3. Le cas général (un cercle de rayon r , roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon R (qui n'est pas très difficile à mettre en équation, bien que cela sorte du cadre du programme) aboutit aux équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + r \sin\left(\frac{R}{r} - 1\right)t \\ y(t) = (R - r) \sin t + r \cos\left(\frac{R}{r} - 1\right)t \end{cases};$$

on en déduit que si $R = 2r$, le point décrit un diamètre du grand cercle. Le cas $R = nr$ (où n entier > 2) s'appelle une *hypocycloïde* à n points de rebroussement. Le lecteur est invité à vérifier que la trajectoire ne se referme sur elle-même que si R/r est rationnel...

- 3** Plus généralement encore, on s'intéressera à la trajectoire d'un point du disque : si le point est situé à la distance a du centre du cercle mobile, les équations deviennent :

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + a \sin\left(\frac{R}{r} - 1\right)t \\ y(t) = (R - r) \sin t + a \cos\left(\frac{R}{r} - 1\right)t \end{cases};$$

on parle d'*hypocycloïdes adoucies* si $a < r$ et d'*hypocycloïdes allongées* si $a > r$. On aura intérêt à exploiter un logiciel graphique pour déterminer rapidement l'allure de ces différentes courbes; un dispositif à engrenages permettant de les tracer était d'ailleurs jadis commercialisé sous le nom de *Spirographe*.

**Intersection d'une sphère et d'un cylindre :
projections et paramétrages.**
Énoncé.

Soit, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, \mathcal{S} la sphère de centre O et de rayon 1, et \mathcal{C} le cylindre (droit) d'axe (C, \vec{k}) , avec $C = (1/2, 0, 0)$, et de rayon $1/2$. On appelle \mathcal{V} la courbe intersection de \mathcal{S} et \mathcal{C} et \mathcal{V}_x la projection de cette courbe sur le plan (O, \vec{j}, \vec{k}) ; déterminer une équation cartésienne de \mathcal{V}_x et en déduire que $\vec{j} + \vec{k}$ est tangent à \mathcal{V}_x en O . Montrer qu'on peut représenter \mathcal{V} par le paramétrage $x = \cos^2 t$, $y = \sin t \cos t$, $z = \sin t$, et en donner une interprétation géométrique; esquisser l'allure de \mathcal{V} et \mathcal{V}_x .

Méthode.

- 1 *La figure (ou du moins une esquisse de celle-ci) est demandée par l'énoncé, mais elle s'imposerait de toute façon; il est peut-être même plus prudent d'essayer de la représenter sous différents angles. Les logiciels de DAO que vous avez (peut-être) appris à utiliser en Mécanique peuvent éventuellement résoudre ce problème, mais on va voir qu'il est possible d'obtenir des équations pour \mathcal{V} et \mathcal{V}_x ; il suffit alors de faire tracer le résultat (au moins en projection) par une calculette graphique.*
- 2 *Le plus simple est de raisonner par projection sur les différents plans de coordonnées (la méthode de base en Construction Mécanique!): soit un point de \mathcal{V} de cote z ; c'est donc que sa projection sur (O, x, y) appartient au cercle $x^2 + y^2 = 1 - z^2$, et comme elle appartient aussi au cercle $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$, on voit qu'on en tire aisément x (et y) en fonction de z .*
- 3 *Le reste n'est qu'une question de calcul; à priori, on penserait à utiliser la représentation paramétrique pour obtenir le vecteur tangent (comme une «vitesse»); mais il s'avère ici qu'interpréter y en fonction de z est plus simple.*
- 4 *Inversement, contrôler que la représentation paramétrique donnée convient (c'est-à-dire que les points M_t appartiennent à \mathcal{V}) ne suffit pas: il faut vérifier qu'on obtient ainsi tout l'ensemble \mathcal{V} ; l'interprétation géométrique demandée permet d'y arriver plus aisément.*

Solution.

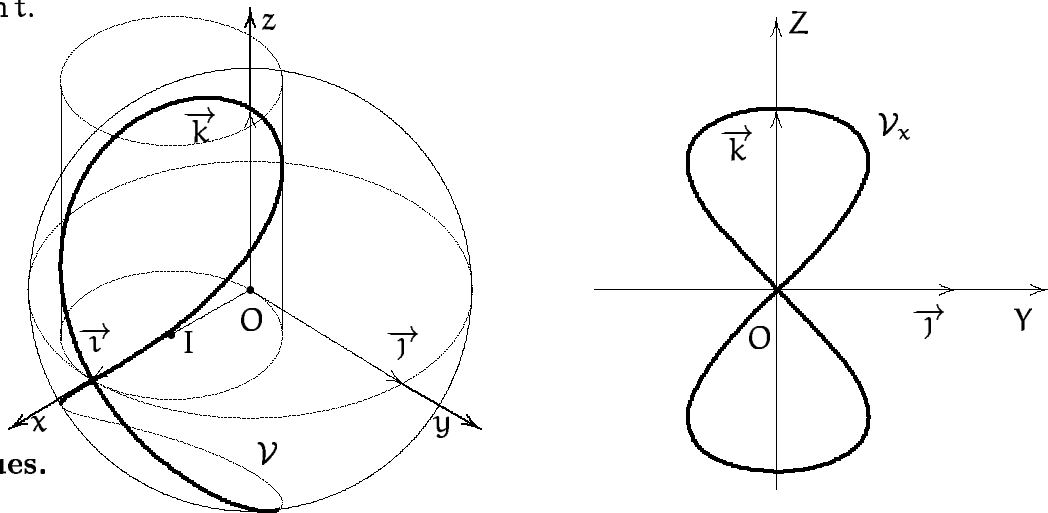
- 1 Soit $M(x, y, z)$ un point de \mathcal{V} . M , appartenant à \mathcal{S} , doit vérifier $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; la projection de M sur le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) appartient au cercle de centre I et de rayon $1/2$, ce qui montre que $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$; ainsi, \mathcal{V} vérifie le système des équations cartésiennes, correspondant à la sphère et au cylindre :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - x + y^2 = 0 \end{cases} ;$$

et si M_x est la projection de M sur le plan (O, \vec{j}, \vec{k}) , on aura M_x de coordonnées $(0, y, z)$. Pour z fixé, on obtient aisément $x = 1 - z^2$ et $y^2 = x - x^2 = z^2 - z^4$; c'est donc cette dernière relation qui correspond à l'équation cartésienne de \mathcal{V}_x :

$$P(Y, Z) \in \mathcal{V}_x \iff Y^2 + Z^4 - Z^2 = 0.$$

- 2 Pour tracer cette courbe, on peut la considérer comme la réunion des deux graphes de fonctions $f : X \mapsto \sqrt{X^2 - X^4}$ et $X \mapsto -\sqrt{X^2 - X^4}$; on voit que $f(X) \underset{0}{\sim} |X|$, ce qui montre que le graphe de f présente en 0 deux demi-tangentes; et que la courbe, par symétrie, est donc tangente en O aux deux bissectrices du repère; comme celles-ci ont pour vecteurs directeurs $\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{j} - \vec{k}$, on en déduit le résultat demandé.
- 3 Soit M_t le point de coordonnées $x_t = \cos^2 t$, $y_t = \cos t \sin t$, et $z_t = \sin t$; on vérifie aisément qu'il satisfait aux deux équations, et appartient donc bien à \mathcal{V} . Montrons la réciproque : soit M un point de \mathcal{V} de coordonnées sphériques $(1, t, \varphi)$ dans le repère sphérique associé à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; sa projection sur le cercle $(I, 1/2)$ a pour coordonnées polaires $(1/2, 2t)$ dans le repère polaire (I, \vec{i}) , puisque l'angle en I est l'angle au centre associé; notre point a donc pour abscisse $x = (1 + \cos 2t)/2 = \cos^2 t$ et pour ordonnée $y = \sin 2t/2 = \sin t \cos t$; et donc on obtient, puisque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = \pm \sin t$. Si $z = \sin t$, on a bien $M = M_t$; sinon, on vérifie aisément que $M = M_{t+\pi}$. Cette description paramétrique permet d'esquisser les tracés de \mathcal{V} et \mathcal{V}_x ; on peut remarquer que \mathcal{V}_x est la courbe de Lissajous $Y = \sin(2t)/2$, $Z = \sin t$.



Remarques.

- 1 Cette méthode ne peut s'appliquer que si l'on dispose d'un système d'équations cartésiennes, et que celui-ci permet (plus ou moins aisément) l'élimination d'une des inconnues. De même, si on avait décrit les surfaces par les systèmes paramétriques

$$(S) : \begin{cases} x = \cos \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \cos \varphi \\ z = \sin \theta \end{cases} ; \quad (C) : \begin{cases} x = (1 + \cos t)/2 \\ y = \sin t/2 \\ z = u \end{cases} ,$$

il aurait fallu éliminer 3 des 4 paramètres, ce qui ne semble pas évident. . .

- 2 Il faut une bonne imagination dans l'espace pour visualiser à l'avance le résultat : ici, il est clair que si le cylindre est de rayon $< 1/2$, on obtiendra deux «ovales» disjoints, et (peut-être moins clairement) que pour un rayon supérieur (et $< 3/2$), on n'a qu'une courbe fermée; le cas limite amène donc à soupçonner un point double, mais de là à deviner la nature de ses tangentes. . . On pourra remarquer que les points de \mathcal{V} vérifient $z^2 = 1 - x$, ce qui montre que la projection de \mathcal{V} sur le plan (Oxz) est un arc de parabole; ce n'était pas non plus aisément prévisible!
- 3 Les courbes des deux fiches précédentes, issues de constructions géométriques ou mécaniques, font partie d'une vaste famille de courbes dites «classiques»; celle que nous venons d'étudier s'appelle la «fenêtre de Viviani». Un répertoire considérable de résultats géométriques (bien oubliés) fut obtenu à leur sujet entre le 17^{ème} et le 19^{ème} siècle; il est actuellement possible, sur l'Internet, d'exhumer et de visualiser tout cet ensemble, à l'aide d'outils de tracé interactifs.