

Quelques résultats sur l'ensemble de Mandelbrot et les polynômes associés.

Cette note vise à exposer certains résultats géométriques concernant l'ensemble de Mandelbrot M , en particulier des formules donnant la position de certains mini-ensembles, dues (pour autant que j'aie pu le déterminer) à Hurwitz et al. ([1]). Le résultat principal est le théorème qui conclut la partie **3** (page 7), et dont je donne une démonstration dont le seul mérite est de n'utiliser que des outils ne dépassant pas le niveau des classes préparatoires. Les conséquences de ce théorème pour la géométrie de l'ensemble de Mandelbrot découlent de résultats bien connus (et exposés en **1**), dus pour la plupart à Douady et Hubbard, et que l'on trouvera par exemple dans [2], mais que je n'ai pas, eux, redémontrés (j'en serais d'ailleurs le plus souvent incapable). Ce texte est rédigé dans l'esprit des classes préparatoires (et n'utilise que des connaissances de ce niveau); en particulier, j'ai détaillé peut-être excessivement certains des calculs et des raisonnements, et laissé en revanche (tout particulièrement dans la dernière partie) quelques autres détails (et généralisations) en exercices pour le lecteur, auquel je serai reconnaissant, par ailleurs, de bien vouloir me signaler les erreurs ou imprécisions qu'il aura pu rencontrer. En 2009, j'ai obtenu (toujours à l'aide des mêmes méthodes élémentaires) des résultats plus puissants, comme je le mentionne dans la dernière partie; on les trouvera mieux exposés et démontrés ici-même, à l'adresse <http://denisfeldmann.fr/PDF/mandel2.pdf>

1. Rappels

Dans ce qui suit, nous identifierons l'ensemble des nombres complexes \mathbf{C} et le plan complexe. L'ensemble M est défini comme l'ensemble des $c \in \mathbf{C}$ tels que la suite $u_n(c)$, définie par $u_0(c) = 0$ et $u_{n+1}(c) = u_n(c)^2 + c$, reste bornée en module (on démontre assez facilement que cela est équivalent à ce que pour tout n , $|u_n(c)| \leq 2$, ce qui implique évidemment que M est inclus dans le disque $|z| \leq 2$). On définit de même l'ensemble de Julia J_c comme l'ensemble des $a \in \mathbf{C}$ tels que la suite v_n définie par $v_0 = a$ et par la même récurrence $v_{n+1} = v_n^2 + c$ reste bornée; on montre cette fois que cela équivaut à $|v_n| \leq 2 + |c|$ pour tout n . M est un ensemble fractal qui a fait le tour des écrans d'ordinateurs du monde entier depuis sa (re)découverte en 1980; vous en trouverez par exemple une bonne présentation graphique (ainsi que beaucoup des résultats mentionnés dans cette note) dans l'article de la Wikipedia anglophone qui lui est consacré: en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set. Au premier abord, M ressemble à un disque pincé (une cardioïde, en fait, comme nous le verrons plus bas) auquel sont collé des disques sur lesquels sont collés d'autres disques, etc; on remarque ensuite quelques petites taches qui, grossies, ressemblent beaucoup à l'ensemble principal; ces copies sont reliées entre elles et à l'ensemble principal par des filaments (en réalité, les filaments eux-mêmes sont invisibles, et c'est artificiellement, en utilisant les lignes de niveau des polynômes que nous verrons plus bas, qu'on parvient à les deviner); ces filaments, suffisamment grossis à leur tour, se résolvent en un chapelet (de forme extrêmement complexe) de copies (beaucoup) plus petites de M , et il semble vrai que tout point de l'intérieur de M se trouve dans l'une de ces copies (on sait démontrer que ce résultat est vrai pour de très nombreux points de M , mais on ne dispose pas encore d'une preuve générale; c'est d'ailleurs une conséquence de la conjecture MLC mentionnée un peu plus loin); en revanche, le fait que l'ensemble est effectivement relié par ces filaments (techniquement, on dit que M est connexe, c'est-à-dire qu'il ne peut être contenu dans la réunion de deux ouverts disjoints du plan) est vrai, mais la démonstration en est étrangement difficile, utilisant, entre autres, des idées issues de la théorie du potentiel (d'ailleurs, le fait que M est localement connexe est encore une conjecture ouverte, la conjecture MLC). Quand à l'aspect des J_c , nettement plus simple, nous en reparlerons un peu plus bas.

Le calcul des suites définissant M et J_c amène naturellement à introduire des familles de polynômes, que nous noterons ici respectivement par $M_n(x)$ et $J_n(x, c)$, définis par $M_1(x) = J_1(x, c) = x$, et $M_{n+1}(x) = (M_n(x))^2 + x$ et $J_{n+1}(x, c) = (J_n(x, c))^2 + c$; M est donc l'ensemble des z tels que $|M_n(z)| \leq 2$ pour tout n , et J_c est de même l'ensemble des z tels que $|J_n(z, c)| \leq 2 + |c|$; les «lignes de niveau» $L_n = \{z / |M_n(z)| = 2\}$, qui sont des courbes fermées simples entourant M (M est l'intersection des «intérieur» de ces courbes, $I_n = \{z / |M_n(z)| \leq 2\}$), jouent un rôle important dans la représentation graphique de M , mais aussi dans son étude théorique. Il est assez évident que si $M_n(z) = 0$, z appartient à M (la suite $M_j(z)$ étant alors périodique); on démontre plus précisément que z est alors intérieur à un ouvert de M (la période de la suite $M_j(z)$ joue un rôle important dans la géométrie de M au voisinage de z); comme expliqué précédemment, on pense que toute composante connexe de l'intérieur de M contient un tel z (qu'on appelle le *centre* de cette composante), mais on ne sait pas le démontrer.

Plus généralement, si la suite des $M_n(c)$ est périodique à partir de $n_0 > 0$, c est dans M , mais appartient à sa frontière (on dit que c est un point de Misiurewicz; tous les points de la frontière de M ne sont pas de ce type, à commencer par ceux dont nous parlerons dans le prochain paragraphe); il s'agit des «extrémités» et des «points de ramification» des filaments décrits plus haut, et nous allons nous intéresser de plus près au cas particulier $c = -2$, mais notre méthode s'appliquerait (avec de considérables difficultés pratiques de calcul) à de très nombreux autres points de ce type, comme cela sera esquissé en 4.

Une autre partie importante de M est la frontière des composantes connexes de son intérieur. Il est facile de voir, par exemple, que si la suite $M_n(c)$ converge vers a , c'est que $a^2 + c = a$; un tel a est un point attracteur (c'est-à-dire que toute suite définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 + c$ converge vers a si u_0 est suffisamment proche de a) si $|f'(a)| < 1$ (en utilisant l'inégalité des accroissements finis), et donc si $|a| < 1/2$. Les c pour lesquels on a ce résultat sont donc ceux pour lesquels $c = z - z^2$, avec $|z| < 1/2$; cet ensemble est donc l'intérieur de la cardioïde d'équations paramétriques $\begin{cases} x = (\cos \theta - \cos 2\theta)/2 \\ y = (\sin \theta - \sin 2\theta)/2 \end{cases}$, qui constitue la plus grosse partie de M ; le bulbe qui est immédiatement sur sa gauche correspond au cas où la suite oscille entre deux limites, donc où $(a^2 + c)^2 + c = a$; on doit donc avoir de même $v_{n+1} = f(f(v_n)) = g(v_n)$ convergeant vers a pour $u_0 = v_0$ assez proche de a , donc $|g'(a)| = |4a(a^2 + c)| < 1$; comme $(a^2 + c)^2 + c - a = (a^2 + c - a)(c + a + a^2 + 1)$, on a $c = -1 - a - a^2$, donc $|4a(1 + a)| < 1$, et on en déduit finalement que $c = Z - 1$, avec $|Z| = |a + a^2| < 1/4$, ce qui montre que c est à l'intérieur du disque de centre $(-1, 0)$ et de rayon $1/4$. Les points frontières dont nous parlons décrivent donc respectivement une cardioïde et un cercle (en ces points, le module de f' ou de g' vaut 1); en un ensemble dense de ces points, une autre composante de l'intérieur de M est tangente à la première (pour être plus précis, au point de paramètre $\theta = 2\pi p/q$, avec p/q irréductible, la composante correspond à un cycle attracteur de longueur q , et de nombreuses autres propriétés «combinatoires» (comme le nombre de «filaments» issus de cette composante) dépendent des valeurs de p et q). Pour autant qu'on le sache, il n'y a pas d'autres composantes de M admettant une description géométrique aussi simple (du moins qui soit rigoureusement exacte; mais la plupart des copies de M qu'on rencontre en l'agrandissant sont déformées dans des proportions imperceptibles à l'œil nu, c'est pourquoi on les voit souvent mentionnés sous le nom de disques et de cardioïdes dans la littérature); nous allons cependant voir que d'autres propriétés géométriques simples de M sont vraies «à la limite».

Parmi les résultats dont nous aurons besoin, le plus important est la relation entre J_c et M : on a d'abord le fait que J_c est connexe (d'un seul tenant, ou, plus rigoureusement,

non recouvrable par des ouverts non vides disjoints) si, et seulement si, c appartient à M . Un théorème plus difficile de Tan Lei ([3]) montre que si c est un point de Misiurewicz, l'ensemble J_c ressemble à l'ensemble M au voisinage de c (ce résultat est d'ailleurs «presque» vrai pour tout c , mais manque remarquablement d'intérêt si c est intérieur à M , et n'est pas aussi précis que le résultat de Tan Lei si c est un point de la frontière de M , mais n'est pas un point de Misiurewicz). Le résultat exact de Tan Lei est que, pour c fixé, il existe $k > 0$ tel que pour tout ε , il existe r réel positif et a complexe avec $|a| < k$ et $|1/a| < k$ tel que pour tout z tel que $|z - c| < r$ et $z \in J_c$, il existe z' avec $|z' - a(z - c) - c| < \varepsilon$, e't $z' \in M$, et que, réciproquement, pour tout z tel que $|z - c| < r$ et $z \in M$, il existe z' avec $|z' - (z - c)/a - c| < \varepsilon$, et $z' \in J_c$; autrement dit, après une similitude convenable de rapport $a(\varepsilon)$ (ce rapport n'étant ni trop grand, ni trop petit), les voisinages de c de rayon ε dans M et dans J_c ont même limite (au sens de Hausdorff) quand ε tend vers 0. Cette ressemblance explique en partie l'aspect fractal de M (mais pas la réapparition des petites copies, qui relève d'un tout autre type de résultat, à savoir l'universalité de M , montrée en [4]), car la plupart des J_c le sont d'une manière bien plus évidente : si $z \in J_c$, c'est donc que $f(z) = z^2 + c \in J_c$, et aussi que tout antécédent de z par $f \circ f \circ \dots \circ f$ est dans J_c ; pour une petite région de J_c de la forme $U = J_c \cap D = \{z / |z - a| < \varepsilon\}$ (avec $a \in J_c$), $f^{-1}(D)$ est formé de deux disques centrés autour de a' et de $-a'$ (avec $a'^2 = a - c$), et de rayon $\varepsilon/2|a'|$. En définitive, et surtout au voisinage des points de la frontière de J_c , J_c est (quasiment) stable par homothétie; le résultat de Tan Lei montre qu'il en est de même pour M au voisinage de tous les points de sa frontière, et en particulier au voisinage des points de Misiurewicz, comme nous allons le voir dans le détail pour $c = -2$; il est par ailleurs clair (en utilisant par exemple le théorème des accroissements finis), que si c est un point de Misiurewicz, et si $f^{n_0}(c) = f^{n_0+k}(c) = a_0$, le comportement au voisinage de c (donc pour un z tel que $z - c$ soit petit) est à peu près le même que celui pour $z_1 = c + p(z - c)$, avec $p = (f^k)'(a_0)$; notant $a_1 = f(a_0)$, $a_2 = f(a_1)$, \dots , a_{k-1} les $f^{n_0+i}(c)$, on a d'ailleurs $p = (f^k)'(a_i) = f'(a_0)f'(a_1)\dots f'(a_{k-1}) = 2^k a_0 a_1 \dots a_{k-1}$; les «extrémités» des filaments et les «points de branchements» sont donc «stables» par une multiplication par p , donc par une similitude directe (de rapport $|p|$ et d'angle $\text{Arg}(p)$), et donc en général proches de spirales logarithmiques (s'enroulant les unes autour des autres aux points de branchements); l'argument de la dérivée p est cependant souvent si petit que l'on a l'illusion de filaments quasi-rectilignes : si, pour $c = i$, $p = -4i(-1+i)$, et s'il suffit donc d'un agrandissement d'un facteur 32 pour voir la spirale tourner d'un quart de tour, ce qui se devine encore vaguement à l'œil nu, en revanche, pour $c \simeq -1, 77126 + 0, 06616i$ (l'extrémité du grand filament partant de la plus grande des petites copies de M sur l'axe réel), il faut agrandir par un facteur de 10^{60} pour voir le même quart de tour; ces calculs seront repris et précisés dans la section 4, où l'on verra en particulier que les spirales serrées de la «vallée des hippocampes» étaient prévisibles a priori. Remarquons enfin que les «disques» collés sur la cardioïde principale, par exemple ceux centrés sur l'axe réel, et à gauche de celui (exact) de centre -1 sont eux aussi presque homothétiques les uns des autres, le facteur d'homothétie, $p \simeq 4, 6692016$ (lequel ne provient pas, en revance, d'un calcul de dérivée) étant l'une des fameuses constantes de Feigenbaum ([5]) ...

2. La relation entre $M_n(x)$ et $J_n(x, -2)$

On va à présent déterminer la répartition des petites copies de M au voisinage de $-2 + 0.i$ (ce point est dans M , et J_{-2} est le segment de l'axe Ox compris entre -2 et 2 , ce qui montre qu'au voisinage de -2 , M est presque confondu avec l'axe des x). Comme on l'a vu en 1, cela revient à déterminer les zéros de $M_n(x)$ au voisinage de

-2 ; il est beaucoup plus facile de déterminer ceux de $J_n(x, -2)$, et nous allons donc commencer par eux.

Une récurrence immédiate (utilisant la relation $2 \cos(2\alpha) = (2 \cos \alpha)^2 - 2$) montre que si $-2 \leq x \leq 2$, $J_n(x, -2) = 2 \cos(2^{n-1} \arccos(x/2))$ (on a donc $J_n(x, -2) = 2T_{2^{n-1}}(x/2)$, où $T_p(x)$ est le p -ème polynôme de Chebyshev); de même, si $x \geq 2$ ou si $x \leq -2$, on a $J_n(x, -2) = 2 \operatorname{ch}(2^{n-1} \operatorname{argch}(|x|/2))$ (soit dit en passant, ces formules généralisées à des x complexes permettent facilement de montrer que la suite $J_n(x, -2)$ reste bornée si et seulement si x est un réel compris entre -2 et 2 ; J_{-2} est donc le segment $[-2, 2]$ de l'axe réel); on en déduit aisément que les zéros de $J_n(x, -2)$ sont les nombres $2 \cos((2k+1)\pi/2^n)$, pour $0 \leq k < 2^{n-1}$; comme $\deg J_n(x, c) = 2^{n-1}$, on voit qu'on a trouvé toutes les racines de $J_n(x, -2)$, et qu'elles sont toutes simples. En particulier, la racine la plus proche de -2 est $2 \cos(\pi - \pi/2^n) = -2 \cos(\pi/2^n) = -2 + \pi^2/4^n + o(4^{-n})$. Malheureusement, $M_n(x)$ ne se rapproche pas (même à la limite) de $J_n(x, -2)$, que ce soit pour n tendant vers $+\infty$, ou pour x tendant vers -2 . Pour aller plus loin, nous allons déterminer les développements de Taylor de $M_n(x)$ et de $J_n(x, -2)$ (que nous noterons désormais $P_n(x)$), au voisinage de $x = -2$.

On va d'abord montrer que pour k fixé, on a $\lim M_n^{(k)}(-2)/P_n^{(k)}(-2) = (2/3)^k$, et plus précisément, que

Lemme 1. $M_n^{(k)}(-2) \sim a_k 4^{kn}$, et $P_n^{(k)}(-2) \sim a_k (3/2)^k 4^{kn}$.

Preuve : Posant $u_n = M_n^{(k)}(-2)$, et remarquant que $M'_{n+1}(x) = (M_n^2(x) + x)' = 2M_n(x)M'_n(x) + 1$, on a donc pour $k = 1$ la récurrence $u_{n+1} = 4u_n + 1$ (pour $n \geq 1$); u_n est arithmético-géométrique, et on vérifie facilement que $u_n = -(2/3)4^{n-1} - 1/3$ (pour $n \geq 2$); comme la suite $v_n = P_n^{(k)}(-2)$ est évidemment géométrique pour $k = 1$, on a donc $v_n = -4^{n-1}$, ce qui démontre le résultat annoncé pour $k = 1$. Supposons qu'on l'ait démontré pour $k = p$; on sait que $M_{n+1}^{(p+1)}(x) = (M_n^2)^{(p+1)}(x) =$ (formule de Leibniz) $2M_n(x)M_n^{(p+1)}(x) + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} M_n^{(j)}(x)M_n^{(p+1-j)}(x)$, et donc, la récurrence

devient, pour $k = p + 1$, $u_{n+1} = 4u_n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} M_n^{(j)}(-2)M_n^{(p+1-j)}(-2)$; posant

$w_n = u_n/4^n$, on a donc $w_{n+1} = w_n + 4^{-n-1} \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} M_n^{(j)}(-2)M_n^{(p+1-j)}(-2)$.

Or chacun des termes de la somme est équivalent, d'après l'hypothèse de récurrence, à $\binom{p+1}{j} a_j a_{p+1-j} 4^{(p+1)n}$, et donc, puisqu'il n'y en a qu'un nombre fini fixe, on

peut écrire $w_{n+1} = w_n + s_n$, avec $s_n \sim K 4^{pn}$ (où $K = (\sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} a_j a_{p+1-j})/4$);

on en déduit (par comparaison avec une série géométrique) que $w_n \sim (K/(4^p - 1))4^{pn}$, d'où le résultat cherché pour la suite u_n , avec la relation de récurrence (*) $a_{p+1} =$

$\frac{1}{4^{p+1} - 4} \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} a_j a_{p+1-j}$ (la valeur exacte des a_i sera déterminée plus bas). Il

suffit alors de remarquer que la suite v_n vérifie exactement la même récurrence, avec des $a'_j = (3/2)^j a_j$, pour en déduire que l'on a la même formule, avec $K' = (3/2)^{p+1} K$, d'où, par récurrence, le lemme.

3. Les zéros de $M_n(x)$.

La formule de Taylor nous dit que $M_n(x) = M_n(-2) + \sum_{k=1}^N (x+2)^k M_n^{(k)}(-2)/k!$ (sans reste si $N \geq 2^{n-1}$), et de même que $P_n(x) = \sum_{k=0}^N (x+2)^k P_n^{(k)}(-2)/k!$; le lemme permet de deviner qu'on aura donc $M_n(-2 + \varepsilon) \simeq P_n(-2 + 2\varepsilon/3)$ si n est assez grand et ε assez petit; on va préciser suffisamment cette approximation pour pouvoir obtenir une approximation de la position du k -ème zéro de $M_n(x)$ à droite de -2 (et donc de l'une des petites cardioïdes sur l'axe des réels) pour k fixé, et quand n tend vers l'infini: les calculs précédents permettent déjà d'en déduire que la position du premier zéro devrait être $-2 + 3\pi^2/2^{2n+1} + o(4^{-n})$, ce qui sera confirmé plus bas.

L'apparition de 4^n dans les formules précédentes (déjà prévisible d'après les résultats de similitude donnés en **1**, puisque ici, $p = 4$) amène à s'intéresser à des fonctions renormalisées à partir des M_n et des P_n . Posant $f_n(x) = P_n(-2 + x/4^n)$, donc (pour $x > 0$) $f_n(x) = 2 \cos(2^{n-1} \arccos(-1 + x/2^{2n+1}))$, et remarquant que $\arccos(-1 + \varepsilon) = 2\pi - \arccos(1 - \varepsilon)$, que $\cos(\arccos(1 - \varepsilon)) = 1 - \varepsilon$, et que $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2 + o(\alpha^3)$, d'où on voit facilement que $\arccos(1 - \varepsilon) \underset{0}{\sim} \sqrt{2\varepsilon}$, on en déduit finalement que (pour x fixé ≥ 0), $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 2 \cos \sqrt{x/4}$; on verrait de même que pour

$x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 2 \operatorname{ch} \sqrt{-x/4}$. Comme on sait que $\cos \sqrt{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k / (2k)!$ et que $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k / (2k)!$, on voit que la suite de fonctions f_n converge simplement,

pour tout x réel, vers $f : x \mapsto f(x) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-x/4)^k / (2k)!$; les calculs qui suivent montreraient d'ailleurs que ce résultat est valable pour tout x complexe. On s'attend donc à ce que la suite des $g_n(x) = M_n(-2 + x/4^n)$ converge (au moins simplement) vers $g(x) = f(2x/3)$.

Notant $f^{(k)}(0) = 2(-1)^k k! / (2k)! = b_k$, on va montrer que les b_i satisfont eux aussi la relation (*), c'est-à-dire que

Lemme 2.
$$b_{p+1} = \frac{\sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} b_j b_{p+1-j}}{4^{p+1} - 4} \text{ pour } p \geq 1.$$

En effet, cela revient à montrer que

$$\frac{2(4^{p+1} - 4)(-1)^{p+1}(p+1)!}{(2p+2)!} = \sum_{j=1}^p \frac{(p+1)!}{j!(p+1-j)!} 4(-1)^{p+1} \frac{j!}{(2j)!} \frac{(p+1-j)!}{(2p+2-2j)!},$$

donc (en simplifiant) que

$$2(4^p - 1) = \sum_{j=1}^p \frac{(2p+2)!}{(2j)!(2p+2-2j)!} = \sum_{j=1}^p \binom{2p+2}{2j}$$

or on sait que $4^{p+1} = 2^{2p+2} = (1+1)^{2p+2} + (1-1)^{2p+2} = 2 \sum_{j=0}^{p+1} \binom{2p+2}{2j}$, d'où le résultat cherché.

Par récurrence, on voit facilement que cela entraîne que $b_n = (b_1/a_1)^n a_n$; d'où en particulier $a_n = 2 \frac{(-2/3)^n n!}{(2n)!}$ (et $M_n^{(k)}(-2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \frac{(-1/6)^k k!}{(2k)!} 4^{kn}$), ce qui montre que

si l'on pose $g_n(x) = \sum_{p=0}^{2^n} a_{p,n}x^p$ et $g(x) = f(2x/3) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p x^p$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{p,n} = c_p$. Cela ne démontre pas encore la convergence des $g_n(x)$, car on pourrait avoir, par exemple, $g(x) - g_n(x) = P_n(x) + K(n)x^{n+1}$, où la suite des P_n convergerait uniformément vers 0, mais avec $K(n) > n!$; il faut donc, pour montrer la convergence, parvenir à estimer le terme d'erreur. Utilisons la formule de Taylor à l'ordre n pour $M_n(x)$: on obtient $M_n(x) = M_n(-2) + \sum_{k=1}^n (x+2)^k M_n^{(k)}(-2)/k! + R_n$, avec $R_n(x) = \frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!} M_n^{(n+1)}(-2 + \theta(x+2))$, où $0 < \theta < 1$. On va montrer que

Lemme 3. Pour $-2 < x \leq 1/4$, $|M_n^{(k)}(x)| \leq b_k(1 + 4^{kn})$.

Preuve : c'est vrai pour $k = 1$, puisque $-2 \leq M_n(x) \leq 2$ (par récurrence, en prenant comme hypothèse de récurrence $M_n(x) < 1/2$ si $0 \leq x \leq 1/4$, et $M_n(x) < -x$ si $-2 < x < 0$), et que $M'_{n+1}(x) = 2M_n(x)M'_n(x) + 1$, donc que $|M'_{n+1}(x)| \leq 4|M'_n(x)| + 1$ (et le résultat s'en déduit par une autre récurrence facile : si $M'_n(x) < 4^n - 1$, on aura $M'_{n+1} < 4^{n+1} - 3 \dots$); supposons ce résultat vrai pour tout n et pour un p fixé, on sait que

$$\begin{aligned} |M_{n+1}^{(p+1)}(x)| &= |2M_n(x)M_n^{(p+1)}(x) + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} M_n^{(j)}(x)M_n^{(p+1-j)}(x)| \\ &\leq 4|M_n^{(p+1)}(x) + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} |b_j b_{p+1-j}| 4^{n(p+1)} \end{aligned}$$

(d'après l'hypothèse de récurrence et l'inégalité triangulaire). $M_1^{(p+1)}(x) = 0$, donc une dernière récurrence sur n (à p fixé) prouvera notre majoration si l'on montre que $|b_{p+1}|4^{(n+1)(p+1)} \leq |b_{p+1}|4^{n(p+1)+1} + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} |b_j b_{p+1-j}| 4^{n(p+1)}$, c'est-à-dire que $|b_{p+1}|4^{p+1} \leq 4|b_{p+1}| + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} |b_j b_{p+1-j}|$, et comme, d'après (*) (vraie de b_n , donc aussi de la suite $|b_n| = (-1)^n b_n$, comme on l'a vu plus haut), $|b_{p+1}| = \frac{\sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} |b_j b_{p+1-j}|}{4^{p+1} - 4}$, ceci achève la démonstration.

Les formules explicites obtenues plus haut permettent donc de majorer $|M_n^{(p)}(x)|$ par $2 \frac{p!}{(2p)!} 4^{pn}$, et enfin d'obtenir la majoration $|R_p(x)| \leq 2 \frac{(x+2)^{p+1}}{(2p+2)!} 4^{n(p+1)}$ pour tout $x \in [-2; 1/4]$.

Bien entendu, pour x fixé, $R_n(x)$ diverge avec n ; on pouvait s'y attendre, puisque cela impliquerait sinon une convergence de $M_n(x) - J_n(x, -2)$ vers 0, et donc l'identité de M et de J_{-2} . En revanche, pour x fixé, et en posant $X = -2 + x/4^n$, on obtient

$$M_n(X) = g_n(x) = 2 + \left(\sum_{k=1}^p \frac{x^k M_n^{(k)}(-2)}{4^{nk} k!} \right) + R_p(-2 + x/4^n); \text{ on a donc } |g(x) - g_n(x)| \leq$$

$S_{p,n}(x) + 2 \frac{x^{p+1}}{(2p+2)!}$, où $S_{p,n}(x)$ est la différence des deux polynômes de Taylor (de degré p) de g_n et de g ; à p fixé, il est clair que cette différence tend vers 0, puisque chaque coefficient de $S_{p,n}(x)$ tend vers 0, et donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver p tel que $x^{p+1}/(2p+2)! < \varepsilon/4$, puis pour cette valeur de p un n_0 tel que pour tout $n > n_0$ on ait $S_{p,n}(x) < \varepsilon/2$, et finalement (pour tout $n > n_0$), $|g(x) - g_n(x)| < \varepsilon$. La

convergence (simple) est donc démontrée (on pourrait, en affinant légèrement ce calcul, montrer de même la convergence uniforme de la suite g_n vers g sur tout compact), et le même calcul, appliqué cette fois à $M'_n(x)$, montre aussi la convergence de la suite des dérivées $g'_n(x)$ vers $g'(x)$; il est à présent facile d'en déduire une approximation des zéros de $g_n(x)$: si en effet $g(x_0) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_0) = 0$, donc pour n assez grand, $|g_n(x_0)| < \varepsilon$ et $|g'_n(x) - g'(x)| < \varepsilon$ pour tout x dans un voisinage fixé de x_0 ; comme $g'(x_0) \neq 0$ ($g'(x) = \frac{-\sin \sqrt{x/6}}{6\sqrt{x/6}}$, qui ne peut s'annuler en même temps que $g(x)$), on a $|g'(x)| > |g'(x_0)|/2$ dans un voisinage assez petit de x_0 ; on en déduit que $g_n(x)$ s'annule en $x_{0,n}$ avec $|x_0 - x_{0,n}| < 4\varepsilon/|g'(x_0)|$; en définitive, faisant tendre ε vers 0, on a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_0 - x_{0,n}| = 0$. Prenons alors (pour $k \geq 1$ fixé) $x_0 = 3(2k-1)^2\pi^2/2$ (le k -ème zéro de $g(x)$), on voit donc que (pour n assez grand) $g_n(x)$ s'annule en α_n , avec $\alpha_n = 3(2k-1)^2\pi^2/2 + o(1)$, donc que $M_n(x)$ s'annule en $-2 + \alpha_n/4^n$, et finalement que

Théorème. *Le k -ème zéro de $M_n(x)$ à droite de -2 est situé en $-2 + \varepsilon_n(k)$, avec*

$$\varepsilon_n(k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3(2k-1)^2\pi^2}{2^{2n+1}}$$

(une estimation plus précise des diverses erreurs commises montrerait que cette valeur est une approximation de $\varepsilon_n(k)$ à un $O(\varepsilon_n^2(k))$ près).

Contrôlons ce résultat avec quelques valeurs numériques des vrais zéros de M_n (ce qui est à recommander : une erreur d'un facteur 4 s'était glissée dans les formules précédentes, et je ne l'ai repérée qu'en janvier 2009...): on obtient par exemple, pour $M_4(x) = x^8 + 4x^7 + 6x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 2x^3 + x^2 + x$, les zéros $x_1 \simeq -1,9408$ et $x_2 \simeq -1,3107$, alors que les formules précédentes prédisent $x_1 = -1,9422$ (ce qui n'est pas trop mauvais) et $x_2 = -1,48$ (ce qui est franchement médiocre), mais pour M_7 (rappelons que c'est un polynôme de degré 64), on trouve déjà $\varepsilon_7(1) = 9,035 \cdot 10^{-4}$ et $\varepsilon_7(2) = 8,132 \cdot 10^{-3}$, alors que $2 + x_1 \simeq 9,043 \cdot 10^{-4}$ et que $2 + x_2 \simeq 8,186 \cdot 10^{-3}$, confirmant notre estimation d'une erreur en $O(\varepsilon_n^2(k))$. En ce qui concerne l'ensemble de Mandelbrot proprement dit, il ne faut évidemment pas s'étonner de découvrir de petites cardioïdes au voisinage de ces zéros, mais il est un peu plus surprenant de constater que la cardioïde C_{n+1} correspondant à la première racine de M_{n+1} est 16 fois plus petite que C_n (ce qui pourrait sans doute se démontrer par des méthodes analogues aux précédentes, en profitant de ce que le point de rebroussement de C_n correspond à l'équation $M'_n(a) = 1$, ce qui permet entre autres de montrer que celui de C_1 est exactement situé en $-7/4$), alors que celle correspondant à la deuxième racine de M_{n+1} est d'une taille comparable à celle de C_n ; une étude expérimentale bien plus détaillée serait nécessaire pour formuler une conjecture plausible; il faut d'ailleurs savoir qu'un problème analogue, la détermination de la taille du n -ème disque accolé à la cardioïde principale, n'est non seulement toujours pas résolu, mais que la démonstration par Yoccoz d'un résultat bien moins précis que les estimations expérimentales qu'on peut faire s'est avérée si redoutable qu'elle lui a demandé l'introduction de nouveaux outils théoriques ... [6]

4. L'aspect de M près des autres points de Misiurewicz.

Il est possible (à l'aide d'outils plus puissants) de montrer des résultats analogues pour tout point de Misiurewicz c : il apparait un facteur d'échelle p (complexe) tel que la suite des $g_n(x) = M_n(c + x/p^n)$ converge vers un cycle limite, c'est-à-dire qu'il existe une suite finie de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ telles que la suite $g_{kn+j}(x)$

converge vers $\varphi_j(x)$, mais en général, on ne saura pas exprimer les fonctions φ à l'aide de fonctions élémentaires, et on ne pourra même pas, le plus souvent, trouver une expression analytique des coefficients du développement de φ en série entière. En effet, si la fonction trouvée en **3**, $g(x) = \varphi(-x/6)$ avec $\varphi(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n / (2n)! = 2 \operatorname{ch} \sqrt{x}$ vérifie bien l'équation fonctionnelle $g(4x) = g^2(x) - 2$ (que φ vérifie également, d'ailleurs), ce qui nous a permis les calculs précédents, on ne connaît en revanche aucun autre exemple d'une fonction φ vérifiant une équation fonctionnelle de la forme $\varphi(kx) = \varphi^2(x) + c$ si $c \notin \{0, -2\} \dots$

Le calcul est cependant encore assez facile à faire en détail si la suite $M_n(c) = J_n(0, c)$ est constante à partir de n_0 : en effet, pour $n > n_0$, on a des récurrences analogues à celles obtenues en **2**, mais commençant à n_0 , et où la constante 4 est remplacé par $\alpha = 2M_{n_0}(c)$ (comme on a $M_{n_0}(c) = M_{n_0+1}(c)$, il est clair que $\alpha = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$, mais la détermination de la branche de la racine carrée ne semble pas facile); on peut leur appliquer la même démonstration que pour le lemme 1, obtenant $M_n^{(k)} \sim a'_k \alpha^{kn}$, et $P_n^{(k)}(c) \sim a'_k \beta^k \alpha^{km}$, où les a'_k vérifient la relation analogue à (*): (**) $a'_{p+1} = \frac{1}{\alpha^{p+1} - \alpha} \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} a'_j a'_{p+1-j}$, et où β est obtenu à partir de $x_1 = M'_{n_0}(c)$ et $x_2 = P'_{n_0}(c)$, en remarquant qu'à partir de n_0 , $P'_n(c) = x_2 \alpha^{n-n_0}$ et $M'_n(c) = \frac{(1 + (x_1 - 1 - \alpha x_1) \alpha^{n-n_0})}{\alpha - 1}$, et donc où $\beta = \frac{x_2(1 - \alpha)}{-1 + x_1(1 - \alpha)}$. Malheureusement, on ne sait pas non plus, en général, résoudre explicitement la récurrence (**)...

Nous allons donc à présent étudier numériquement le cas le plus simple d'un tel point (autre que $c = -2$): celui correspondant à $M_3(c) = M_4(c) \neq M_2(c)$ et c réel, c'est-à-dire que c est solution de l'équation $c^3 + 2c^2 + 2c + 2 = 0$ (les deux autres solutions correspondent aux extrémités des plus longs filaments partant de la cardioïde et bifurquant aussi vers les filaments aboutissant en i et $-i$); on obtient $c \simeq -1,543689$ (en c , le filament déjà peu épais qui suit l'axe réel s'amincit encore jusqu'à presque disparaître) et les constantes $\alpha \simeq -1,6785735$ et $\beta \simeq 1,8012234$. L'analyse précédente montre qu'il nous faut alors construire une fonction (analytique, c'est-à-dire développable en série entière) φ telle que $\varphi(\alpha x) = \varphi^2(x) + c$, ou du moins obtenir la position de ses zéros, pour pouvoir finalement déterminer une formule analogue à celle du théorème 1. Il est relativement facile de montrer qu'une telle fonction existe (et est unique si l'on suppose $\varphi'(0) = 1$): les coefficients de la série correspondante sont en effet donnés par les mêmes récurrences, et on peut montrer qu'ils ne grandissent pas trop vite (par exemple en les comparant (pour un t bien choisi) à ceux de la série $1 - \sqrt{1 - 4tx} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, qui vérifient la récurrence

$c_{n+1} = \sum_{k=1}^n c_k c_{n-k+1}$) et donc que la série a un rayon de convergence non nul;

le principe du prolongement analytique montre alors qu'en fait ce rayon de convergence est infini. Mais, comme on l'a dit, φ ne peut s'exprimer en termes de fonctions élémentaires, et le calcul de ses zéros ne pouvant donc se faire que de manière numérique, il semble plus simple de chercher directement l'approximation correspondante à partir des racines des M_n . Cependant, comme $\varphi(x_c) = 0 \Rightarrow \varphi(x_c/\alpha)^2 = -c$, on en déduit aisément que si $\varphi(x_c) = 0$, on aura $\varphi(x_c/\alpha^n) = \sqrt{-c + \sqrt{-c + \sqrt{\dots + \sqrt{-c}}}}$ (avec n radicaux) si $\alpha > 0$ et $\varphi(x_c/\alpha^n) = -\sqrt{-c - \sqrt{-c - \sqrt{\dots - \sqrt{-c}}}}$ sinon; cela donne au passage une preuve de ce que si $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - c}$, on a convergence de

(u_n) vers $L = (1 + \sqrt{1 - 4c})/2$, et $d_n = L - u_n \sim \frac{x_c}{\alpha^n}$. Cette dernière approximation, bien que connue, semble d'ailleurs avoir été assez peu étudiée : on ne trouve semble-t-il dans la littérature (outre le cas $c = -2$) que la valeur de x_c correspondant au cas $c = -1$ et donc $\alpha = 1 + \sqrt{5}$; c'est la constante de Paris $x_{-1} \simeq 2,19728$ [7]. En tout cas, elle permet d'obtenir rapidement une valeur très précise de x_c (à condition évidemment de faire les calculs avec une précision double de celle cherchée); ici, on obtient $x_c \simeq -1,5588926$, valeur confirmée par le développement en série entière de φ :
$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{2} + x + \frac{x^2}{\alpha^2 - \alpha} + \frac{2x^3}{\alpha^3 - \alpha} + \dots$$
 (en prenant 15 termes, on a $|\varphi(x_c)| < 10^{-12}$). Là encore, le calcul des zéros de $M_n(x)$ et de $J_n(x, c)$ au voisinage de c s'impose pour confirmer ces résultats; la méthode de Newton permet aisément de les obtenir avec une excellente précision, et on trouve par exemple en effet qu'en appelant respectivement x_n et y_n les racines de M_n et de $J_n(x, c)$ les plus proches de c , on a $(x_n - c)/(y_n - c) \simeq 1,8012234$ dès que $n > 40$.

Plus généralement, on s'attend donc à ce qu'au voisinage d'un point c prépériodique de période 1, le filament correspondant soit stable par homothétie de rapport $p = \alpha = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$; la plupart des filaments presque rectilignes que l'on voit pour $-2 \leq \Re(c) \leq -1,5$ correspondant à ce cas, et alors il est facile de vérifier que l'argument de α est très petit, car $\text{Im}(c)$ est petit aussi, ce qui explique que les spirales logarithmiques correspondantes donnent l'illusion d'arcs à peine incurvés; inversement, dans la «vallée des éléphants», pour c proche de $1/4$, on aura $|\alpha|$ proche de 1 et des spirales très serrées (au point qu'il n'est en général pas possible de les visualiser par les programmes usuels de tracé de M).

En revanche, les calculs deviennent vite inextricables pour des suites $M_n(c)$ périodiques non constantes, même si certains résultats généraux sont faciles à obtenir. Ainsi, si la suite des $M_n(c)$ est périodique de période 2, on vérifie aisément qu'elle oscille entre les deux racines de $X^2 + X + c + 1$, et que p vaut donc $4(c + 1)$; cette fois, c'est ce résultat qui explique certaines des spirales serrées de la «vallée des hippocampes», près de $c = -3/4$. De même, l'expérimentation numérique pour $c = i$ (où la suite des $M_n(c)$ est $(0, i, -1 + i, i, -1 + i, \dots)$, périodique de période 2 à partir de $n_0 = 2$) montre que l'on a encore une relation de «proportionnalité» entre les $M_n^{(k)}(i)$ et les $P_n^{(k)}(i)$, la constante β valant cette fois $1 + 2i$ (ne dépendant pas de la parité de n , comme exposé plus haut), la démonstration de ce résultat précis ne demande pas de méthodes plus profondes que celles développées dans cet article, mais les calculs deviendraient assez pénibles sans l'aide de Maple...

À ma grande surprise, j'ai réussi en 2009 à obtenir (toujours avec les mêmes outils élémentaires) des démonstrations de résultats pratiquement équivalent à ceux de Tan Lei; pour ne pas allonger trop cet article (et aussi parce que, tout de même, la lecture des calculs correspondants est assez fastidieuse), on les trouvera dans un second document, à <http://denisfeldmann.fr/PDF/mandel2.pdf>.

Références.

- [1] H.Hurwitz, M.Frame, D.Peak. Scaling symmetries in nonlinear dynamics. *Physica* **81** (1995)
- [2] A.Douady et J.Hubbard. On the dynamics of polynomial-like mappings *Ann.Sci.Éc.Norm.Sup.* **18** (1985), 287-344 (sur le Web à : archive.numdam.org/)
- [3] T. Lei. Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets, *Commun.Math.Phys.* **134** (1990), 587-617 (sur le Web à : projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf.1&handle=euclid.cmp/1104201823)
- [4] McMullen C. The Mandelbrot set is universal *The Mandelbrot set, Theme and Variations* (Tan

Lei editor) *Cambridge university Press* (2000), 1-18

(sur le Web : math.harvard.edu/~ctm/papers/home/text/papers/muniv/muniv.pdf)

[5] Sur le site de MathWorld : mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html

[6] Un résumé des travaux de J.C. Yoccoz sur le site de St Andrews : <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Yoccoz.html>

[7] Sur le site de MathWorld : mathworld.wolfram.com/ParisConstant.html