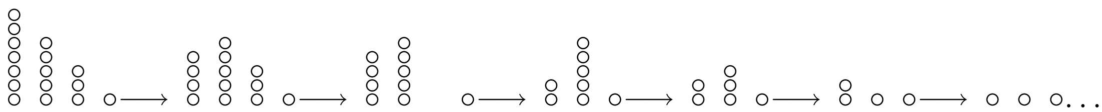
Le jeu de Nim bicolore : deux ou trois choses que je sais de lui...

Introduction

Le jeu de Nim est un cas particulier des jeux impartiaux, ou jeux de Grundy (ce sont des jeux où les deux joueurs ont à chaque coup les mêmes possibilités) ; au jeu de Nim, une position est formée d'un certain nombre de tas d'objets, chaque joueur peut prendre à son tour autant d'objets qu'il veut, mais dans un seul tas, et celui qui prend le dernier objet a gagné (dans la forme «normale» du jeu), ou perdu (dans sa forme «à qui perd gagne», souvent la plus connue, par exemple c'est celle de la version proposée dans le film *L'année dernière à Marienbad*). La stratégie gagnante est la même dans les deux formes (sauf dans les tous derniers coups de la partie) : il faut, pour gagner, laisser à l'adversaire une position dans laquelle la «somme de Nim» des nombres d'objets de chaque tas est nulle, cette somme étant définie par la décomposition de chaque nombre en base 2, et par l'addition des résultats dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; autrement dit, on définit une opération $m \oplus_2 n$ par les règles $2^p \oplus_2 2^q = 2^p + 2^q$ si $p \neq q$, et $2^p \oplus_2 2^p = 0$; ainsi $7 \oplus_2 5 \oplus_2 3 \oplus_2 1 = (2^2+2^1+2^0) \oplus_2 (2^2+2^0) \oplus_2 (2^1+2^0) \oplus_2 2^0 = 0$, ce qui montre que la position du film est perdante pour qui commence. Un exemple de partie possible est représentée ci-dessous (avec, à chaque coup, la somme correspondant à la position résultante, qui sera par la suite notée $\mathcal{G}(P)$, inscrite au dessous) ;

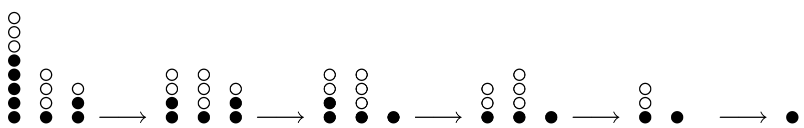


$\mathcal{G}(P)$: 0 3 0 6 0 2 1

À qui perd gagne, la règle de gain doit légèrement être modifiée lorsqu'il ne reste plus que des tas d'un seul objet. La démonstration de ce résultat, redécouvert indépendamment par Bouton (qui a donné le nom de Nim à ce jeu), Sprague et Grundy, et bien d'autres, figure sur de nombreux sites Internet, ainsi, bien sûr que dans les livres de Conway mentionnés plus bas, et nous ne la redonnerons pas ici. De nombreux jeux impartiaux sont suceptibles d'une théorie complète analogue, que ce soit dans leur forme normale (où, de plus, la règle de «Nim-addition» s'applique encore) ou dans leur forme «à qui perd gagne», et Conway, Berlekamp et Guy ont donné de longues listes de telles analyses dans *Winning Ways* ; malheureusement, d'autres jeux de cette famille, apparemment aussi réguliers, voient apparaître des difficultés inattendues, et c'est le cas de la variante à laquelle est consacrée cette note.

Le jeu bicolore

J'ai proposé (il y a plus de trente ans !) la variante suivante : on joue avec des marqueurs blancs et noirs (des pierres de go, par exemple), les tas pouvant contenir un mélange des deux couleurs, et celui qui prend la dernière pierre a gagné si elle est blanche, et perdue si elle est noire. Voici un exemple de partie possible :



(l'avant-dernier coup joué est clairement mauvais, mais qu'aurait-il fallu faire à la place ? *) Une analyse même superficielle montre que ce jeu est beaucoup plus complexe que les jeux de Grundy usuels : il n'est en effet pas «additif», c'est-à-dire que par exemple les deux positions $\begin{smallmatrix}\circ\\\circ\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\circ\\\circ\end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix}\bullet\\\bullet\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\bullet\\\bullet\end{smallmatrix}$ sont perdantes pour qui commence, mais qu'il n'en est pas de même de leur somme $\begin{smallmatrix}\circ\\\circ\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\circ\\\circ\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\bullet\\\bullet\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\bullet\\\bullet\end{smallmatrix}$, qui permet le coup gagnant $\longrightarrow \circ\ \begin{smallmatrix}\circ\\\circ\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\bullet\\\bullet\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\bullet\\\bullet\end{smallmatrix}$. La théorie de Grundy (qui a été considérablement développée ces dernières années par Conway et Berlekamp dans *Winning Ways*, et d'ailleurs étendue de façon tout à fait surprenante aux jeux «partisans», mais, hélas, les résultats correspondants ne nous aideront pas) s'applique tout de même partiellement, et nous allons commencer par définir une famille de nombres associés à chaque position, et qui permettent dans de nombreux cas de déterminer rapidement le ou les coups gagnants.

Valeurs d'une position

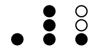
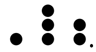
La théorie de Grundy associe à toute position P d'un jeu impartial un nombre $\mathcal{G}(P)$ défini par récurrence comme valant 0 si la position P est terminale (c'est-à-dire qu'on ne peut plus y jouer, et que le joueur dont c'est le tour a perdu) et comme le plus petit entier non élément de $\{\mathcal{G}(P_1), \mathcal{G}(P_2), \dots, \mathcal{G}(P_n)\}$, où les P_i sont les «successeurs» de P, c'est-à-dire les positions que l'on peut obtenir en jouant un coup dans P. On se convaincra aisément qu'un coup est gagnant si et seulement si la position P qui en résulte vérifie $\mathcal{G}(P) = 0$; elle est égale au jeu nul $(0 = \{\ |\ \})$ dans la théorie de Conway (connue en anglais sous le nom de *Combinatorial Game Theory*, ou *CGT*), et nous dirons donc qu'une telle position est nulle (une position nulle est donc une position devant laquelle le joueur qui commence doit perdre, si l'autre joue correctement; soit dit en passant, avec les notations de Conway, on a $P = *\mathcal{G}(P) = \{*0, *1, *2, \dots, *(\mathcal{G}(P)-1) | *0, *1, *2, \dots, *(\mathcal{G}(P)-1)\}$, avec $*0 = 0$ et $*1 = * = \{0|0\}$) ; il est nettement moins évident (mais nous n'aurons pas à utiliser ce résultat ici) qu'une somme de deux jeux de Grundy (jouée en règle «normale», avec à chaque tour un coup joué dans une seule des deux composantes) vérifie la formule $\mathcal{G}(P+Q) = \mathcal{G}(P) \oplus_2 \mathcal{G}(Q)$; c'est cette règle qui permet de déterminer la stratégie gagnante dont on a parlé dans l'introduction. Il s'avère qu'au jeu de Nim bicolore, si $n = \mathcal{G}(P)$, la position obtenue en ajoutant à P un tas de n pierres blanches est nulle (c'est-à-dire que le joueur qui commence n'a pas de coup gagnant), et que n est le nombre unique ayant cette propriété. Nous allons démontrer qu'il existe de même un nombre unique, $p = \mathcal{G}^-(P)$, tel que la position obtenue en ajoutant à P un tas de p pierres noires est nulle : il est clair d'abord qu'il ne saurait exister deux tels nombres, car le coup passant de $P+q_1$ à $P+q_2$ serait gagnant, ce qui est absurde puisque $P+q_1$ est supposée nulle; si pour tout q, $P+q$ était non nulle, cela voudrait dire qu'il existe pour tout q une position P_q telle que le coup passant de $P+q$ à P_q+q serait gagnant; comme il n'existe qu'un nombre fini de positions atteignables à partir de P, on aurait donc, pour deux entiers distincts q et q', $P_q = P'_q$, et donc $P_q + q$ et $P_q + q'$ seraient nulles, ce qu'on vient de montrer absurde. Ce raisonnement (valable aussi pour $\mathcal{G}(P)$) montre déjà au passage que $\mathcal{G}^-(P) \leq \#\{\text{successeurs de } P\}$; mais plus précisément, on voit qu'en notant $\mathcal{S}(P)$ l'ensemble des positions «successeurs» de P (c'est-à-dire ces positions qu'on obtient à partir de P en jouant un coup légal), on aura $\mathcal{G}^-(P) = \mathrm{mex}\{\mathcal{G}^-(Q)\}_{Q\in\mathcal{S}(P)}$, où $\mathrm{mex}(n_1, n_2, \dots, n_p)$ est le plus petit entier qui n'est pas un des n_k (en effet, la position $P + \mathcal{G}^-(P)\bullet$ est nulle, puisque tout coup retirant des pierres noires est réfuté par le coup correspondant vers l'un des $P' \in \mathcal{S}(P)$, et qu'aucune position $P' + \mathcal{G}^-(P)\bullet$ n'est nulle). En réalité, cette formule (et celle équivalente donnant $\mathcal{G}(P)$) n'est pas tout à fait correcte pour les «petites» positions :

---

* un coup gagnant serait, par exemple, $\begin{smallmatrix}\circ\\\circ\\\bullet\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\circ\\\circ\\\circ\\\bullet\end{smallmatrix}\ \bullet \longrightarrow \begin{smallmatrix}\circ\\\circ\\\bullet\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\circ\\\bullet\end{smallmatrix}\ \bullet$

on a $\mathcal{G}(\emptyset)=0$, mais $\mathcal{G}^-(\emptyset)=1$, et de même $\mathcal{G}(\bullet)=\mathcal{G}^-(\bullet)=0$, on en déduit que si P est un tas de n pierres contenant au moins une pierre blanche (on dit que c'est un tas gris), on aura $\mathcal{G}(P)=n$ et $\mathcal{G}^-(P)=n+1$, et que si P est un tas de n pierres noires, on aura $\mathcal{G}(P)=n-1$ et $\mathcal{G}^-(P)=n$; un raisonnement stratégique direct montre plus généralement qu'une position formée de deux tas gris est nulle si et seulement si ils ont le même nombre de pierres.

Positions à trois tas

On pourrait espérer, généralisant les résultats précédents, que deux tas gris (au moins non blancs) ayant le même nombre de pierres sont «équivalents»; il n'en est bien entendu rien, comme le montre le contre-exemple des deux positions  et : la première est nulle, mais la seconde permet le coup gagnant $\longrightarrow$ . Nous allons commencer par calculer les fonctions $\mathcal{G}(P)$ et $\mathcal{G}^-(P)$ quand (respectivement) P est formé de deux tas noirs ou de deux tas blancs (les fonctions correspondant aux cas où les deux tas sont de couleurs opposées s'en déduisent aisément, et $\mathcal{G}(P)$ (respectivement $\mathcal{G}^-(P)$), quand P est formé de deux tas blancs (respectivement noirs) de taille m et n, valant tout simplement $m\oplus_2 n$, on voit qu'on aura ainsi déterminé toutes les positions nulles n'ayant que des tas monocolores). Les résultats du paragraphe précédent montrent qu'en notant par exemple $f_n(p)$ la fonction $\mathcal{G}(P_{(n),(p)})$ d'une position $P_{(n),(p)}$ formée de deux tas de n et p pierres noires, on a $f_0(p)=f_p(0)=p-1$ (avec $f_0(0)=0$), et que $f_n(p)=\operatorname{mex}(f_0(p),f_1(p),\ldots,f_{n-1}(p),f_n(0),f_n(1),\ldots,f_n(p-1))$. On en déduit aisément que $f_1(p)=p$, puis que $f_2(p)$ est arithmético-périodique de période 3, c'est-à-dire que $f_2(p+3)=f_2(p)+3$ (et que $f_2(0)=1$, $f_2(1)=2$ et $f_2(2)=0$), mais les valeurs suivantes de f_p sont nettement moins évidentes (à part, bien sûr, la symétrie $f_p(n)=f_n(p)$); voici un tableau des premières valeurs :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f_0(p)$	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f_1(p)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f_2(p)$	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13	14	12	16	17	15	19	20	18
$f_3(p)$	2	3	4	0	1	6	8	5	9	7	12	13	10	11	15	17	14	18	16	21	22
$f_4(p)$	3	4	5	1	0	2	9	10	11	6	7	8	14	15	16	12	13	19	20	17	21
$f_5(p)$	4	5	3	6	2	0	1	9	10	11	8	7	15	16	17	13	12	14	21	22	23
$f_6(p)$	5	6	7	8	9	1	0	2	3	4	13	12	16	10	11	18	19	20	14	15	17
$f_7(p)$	6	7	8	5	10	9	2	0	1	3	4	14	17	18	19	11	20	12	13	16	15
$f_8(p)$	7	8	6	9	11	10	3	1	0	2	5	4	18	17	20	19	21	13	12	14	16.

On peut déjà remarquer que beaucoup de régularités apparentes se brisent pour n et p assez grands, ainsi, la formule $f_n(p)=n+p-1$ (si $n\neq p$) devient fausse pour $n+p\geq 6$, même si les exceptions qui apparaissent progressivement ne sont pas au début très nombreuses, comme par exemple pour $n+p=9$ ou $n+p=18\ldots$ On peut néanmoins montrer que toutes les fonctions f_p sont arithmético-périodiques; plus précisément, elles ont la période T_p à partir de m_p (c'est-à-dire que $f_p(k+m_p+T_p)=f_p(k+m_p)+T_p$), ces périodes étant données par le tableau suivant :

p	1	2	3	4	5	6
T_p	1	3	9	36	144	720
m_p	0	0	1	10	22	22,

ce qui ne semble guère se prêter à une généralisation simple (et n'est de toute façon que d'un intérêt limité en pratique, étant donné la taille des positions jouables...). Définissant de même $g_n(p)$ comme étant la fonction $\mathcal{G}^-(P_{n,p})$ d'une position $P_{n,p}$

formée de deux tas de n et p pierres blanches, on obtient cette fois (avec pour seule ambiguïté $g_0(0) = 0$ ou 1) :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g_0(p)$	(1)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$g_1(p)$	2	0	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g_2(p)$	3	1	0	2	6	4	5	9	7	8	12	10	11	15	13	14	18	16	17	21	19
$g_3(p)$	4	3	2	0	1	7	8	5	6	11	9	13	10	12	16	17	14	15	20	18	22
$g_4(p)$	5	4	6	1	0	2	3	10	11	7	8	9	14	16	12	13	15	19	21	17	18
$g_5(p)$	6	5	4	7	2	0	1	3	10	12	13	8	9	11	17	18	19	14	15	16	23
$g_6(p)$	7	6	5	8	3	1	0	2	4	13	14	15	16	9	10	11	12	20	22	23	17
$g_7(p)$	8	7	9	5	10	3	2	0	1	4	6	14	15	17	11	12	13	21	16	22	24
$g_8(p)$	9	8	7	6	11	10	4	1	0	2	3	5	17	18	19	20	21	12	13	14	15,

le tableau correspondant des périodes étant

p	1	2	3	4	5	6
T_p	1	3	9	36	144	720
m_p	3	3	5	7	8	16.

On peut remarquer que f_n et g_n sont définies par les mêmes récurrences (mais avec une base légèrement différente) que celles des fonctions de «transfert» du jeu décrit par Conway (dans *On Numbers and Games, p. 190*) sous le nom de Digital Deletions, et que ces dernières ont les mêmes périodes T_p ; bien que les résultats donnés ici soient plus complets que ceux de *ONAG*, ils restent relativement chaotiques, et permettent de penser qu'une solution explicite du jeu de Nim bicolore n'est pas prêt d'être découverte.

Comme on l'a dit plus haut, ces tables suffisent (en pratique) à déterminer toutes les positions nulles formées de trois tas monocolores. Ainsi, si on appelle $h_n(p)$ la fonction $\mathcal{G}(P_{n,(p)})$, où $P_{n,(p)}$ est la position formé d'un tas blanc de n pierres et d'un tas noir de p pierres, on a clairement $g_n(h_n(p)) = p$, donc $h_n(p) = g_n^{-1}(p)$; comme g_n est une permutation arithmético-périodique, g_n est en fait (à partir d'un p assez grand) une permutation de la période $[\![a_n + kT_n, a_n + (k+1)T_n - 1]\!]$ pour tout k (mais contrairement à ce qu'on pourrait croire, on n'a pas en général $a_n = m_n$), ce qui prouve que h_n est aussi arithmético-périodique de période T_n. Mais bien sûr, on n'a plus de symétrie, et la fonction h'_n définie par $h'_n(p) = h_p(n)$ est toujours arithmético-périodique, mais, déjà, h'_1 est de période 2... Voici un tableau des valeurs des fonctions h et h' :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$h_0(p)$	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$h_1(p)$	1	2	0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$h_2(p)$	2	1	3	0	5	6	4	8	9	7	11	12	10	14	15	13	17	18	16	20	21
$h_3(p)$	3	4	2	1	0	7	8	5	6	10	12	9	13	11	16	17	14	15	19	21	18
$h_4(p)$	4	3	5	6	1	0	2	9	10	11	7	8	14	15	12	16	13	19	20	17	22
$h_5(p)$	5	6	4	7	2	1	0	3	11	12	8	13	9	10	17	18	19	14	15	16	23
$h_6(p)$	6	5	7	4	8	2	1	0	3	13	14	15	16	9	10	11	12	20	21	22	17

$h'_0(p)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$h'_1(p)$	0	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	18	17	20	19
$h'_2(p)$	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21
$h'_3(p)$	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22
$h'_4(p)$	3	4	5	0	1	2	8	9	6	7	12	13	10	11	16	17	14	15	20	21	18
$h'_5(p)$	4	5	6	7	0	1	2	3	11	12	13	8	9	10	17	18	19	14	15	16	23
$h'_6(p)$	5	6	4	8	2	0	1	10	3	13	7	14	15	9	11	12	20	21	22	23	16,

et de leurs périodes :

p	1	2	3	4	5	6
T_p	1	3	9	36	144	720
m_p	3	4	8	7	8	14
a_p	3	4	4	7	8	17
T'_p	2	2	4	4	6	24
m'_p	1	0	0	6	8	10.

Le problème se complique nettement pour les tas non monocolores. On va par exemple étudier une nouvelle famille de fonctions $f'_n(p) = \mathcal{G}(P_{n+(1),p})$, où $P_{n+(1),p}$ est la position formé d'un tas de p pierres blanches, et d'un tas d'une pierre noire et de n pierres blanches (on voit que $f'_n(p) = q \iff f'_n(q) = p$, et donc que $f'_n = {f'_n}^{-1}$). On a donc, comme expliqué ci-dessus, $f'_0(p) = h'_1(p) = h_p(1) = g_p^{-1}(1)$, mais cela ne permet pas si facilement de trouver une formule régulière (qu'on déterminerait plus aisément par un raisonnement stratégique) : on obtient finalement $f'_0(0) = 0$, $f'_0(2k-1) = 2k$ et $f'_0(2k) = 2k-1$ pour tout $k \geq 1$. Il est clair ensuite qu'on aura $f'_n(p) = \text{mex}(f'_0(p), f'_1(p), \ldots, f'_{n-1}(p), f'_n(0), f'_n(1), \ldots, f'_n(p-1), (k \oplus_2 p)_{0 \leq k \leq n})$ (cette dernière famille correspondant aux coups retirant la pierre noire) ; on constate que $f'_1(p) = 2 \oplus_2 p$ (ce qui montre que les tas $\overset{\circ}{\bullet}$ et $\overset{\circ}{\circ}$ sont «équivalents» pour la fonction $\mathcal{G}$ si on ne leur adjoint qu'un tas blanc) ; une fois de plus, ce résultat ne se généralise pas, car d'une part (comme on le voit ci-dessous) $f'_2(p) \neq 3 \oplus_2 p$ en général (et ce n'est d'ailleurs pas non plus $3 \oplus_3 p \ldots$), d'autre part la position $\circ \;\bullet\; \overset{\circ}{\circ}$ est nulle, contrairement à la position $\circ \;\bullet\; \overset{\circ}{\bullet}$. Voici un tableau des premières valeurs des f'_n :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f'_0(p)$	0	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	18	17	20	19
$f'_1(p)$	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22
$f'_2(p)$	3	4	5	0	1	2	8	9	6	7	12	13	10	11	16	17	14	15	20	21	18
$f'_3(p)$	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	20	21	22	23	16
$f'_4(p)$	5	6	4	8	2	0	1	10	3	12	7	14	9	16	11	18	13	20	15	22	17
$f'_5(p)$	6	7	8	5	9	3	0	1	2	4	13	16	17	10	18	19	11	12	14	15	24
$f'_6(p)$	7	8	9	10	11	12	13	0	1	2	3	4	5	6	17	20	23	14	21	24	15
$f'_7(p)$	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	24	25	26	27	28
$f'_8(p)$	9	10	11	12	8	14	15	13	4	0	1	2	3	7	5	6	25	24	27	26	29,

les périodes étant

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T_p	2	4	4	8	8	8	24	16	48
m_p	1	0	6	0	9	18	14	0	15.

On remarquera les simplifications par rapport aux f_n ; il semble bien que l'on ait $f'_{2^n-1}(p) = 2^n \oplus_2 (p)$ (et donc qu'on ait la même «équivalence» que celle signalée plus haut lorsque le tas gris est formé de 2^n pierres, dont une noire), mais je ne l'ai pas démontré...

Le calcul des $g'_n(p) = \mathcal{G}^-(P_{n+(1),p})$ est pratiquement identique : $g'_0 = f_1^{-1} = f_1$, puis $g'_n(p) = \text{mex}(g'_0(p), g'_1(p), \ldots, g'_{n-1}(p), g'_n(0), g'_n(1), \ldots, g'_n(p-1), (g_k(p))_{0 \leq k \leq n})$ (cette dernière famille correspondant aux coups retirant la pierre noire) ; les tableaux des valeurs de g'_n :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g'_0(p)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g'_1(p)$	3	4	0	1	2	7	5	6	10	8	9	13	11	12	16	14	15	19	17	18	22
$g'_2(p)$	4	3	5	0	1	2	8	10	6	7	13	9	14	11	12	17	19	15	16	22	18
$g'_3(p)$	5	6	4	7	0	1	2	3	11	12	8	14	9	10	17	13	20	21	15	16	23

$g'_4(p)$	6	5	7	8	3	0	1	2	4	13	14	15	16	9	10	11	12	20	22	23	17
$g'_5(p)$	7	8	9	5	10	3	0	1	2	4	6	16	15	17	11	12	13	22	14	24	25
$g'_6(p)$	8	7	10	6	9	11	4	0	1	2	3	5	17	18	19	20	21	12	13	14	15
$g'_7(p)$	9	10	8	11	7	12	13	4	0	1	2	3	5	6	18	19	22	23	24	15	14
$g'_8(p)$	10	9	11	12	8	13	14	15	3	0	1	2	4	5	6	7	23	24	25	26	16

et de leurs périodes

p	0	1	2	3	4
T_p	1	3	9	9	108
m_p	0	5	6	11	25

s'avèrent nettement plus irréguliers...

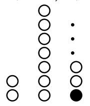
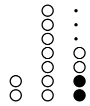
Il est évidemment possible de continuer dans cette voie, en étudiant ensuite les fonctions f''_n définies par $f''_n(p) = \mathcal{G}(P_{n+(2),p})$, le tas gris de $P_{n+(2),p}$ étant formé de deux pierres noires et de n pierres blanches. La récurrence devient alors $f''_n(p) = \mathrm{mex}((f''_k(p))_{0\leq k\leq n-1}, (f''_n(k))_{0\leq k\leq p-1}, (k\oplus_2 p)_{0\leq k\leq n}, (f'_k(p))_{0\leq k\leq n})$, où $f''_0(p) = h''_2(p)$, donc (comme précédemment) $f''_0(p) = g_p^{-1}(2)$; finalement, il s'avère que $f''_0(p) = 1\oplus_2 p$. On obtient donc :

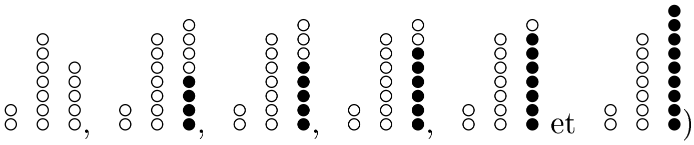
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f''_0(p)$	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21
$f''_1(p)$	3	4	5	0	1	2	8	9	6	7	12	13	10	11	16	17	14	15	20	21	18
$f''_2(p)$	4	5	6	7	0	1	2	3	11	12	13	8	9	10	17	18	19	14	15	16	23
$f''_3(p)$	5	6	4	8	2	0	1	10	3	14	7	16	17	18	9	19	11	12	13	15	24
$f''_4(p)$	6	7	8	5	9	3	0	1	2	4	15	17	16	19	18	10	12	11	14	13	25
$f''_5(p)$	7	8	9	10	11	12	13	0	1	2	3	4	5	6	19	20	22	23	21	14	15
$f''_6(p)$	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	24	22	25	26	27
$f''_7(p)$	9	10	11	12	8	14	15	13	4	0	1	2	3	7	5	6	25	24	27	28	26
$f''_8(p)$	10	11	12	9	13	8	16	14	5	3	0	1	2	4	7	21	6	26	24	25	30,

les périodes étant

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T_p	2	4	6	8	48	48	96	96	96
m_p	0	6	8	19	20	43	49	178	195,

mais cette approche (extrêmement fastidieuse, même à l'aide de Maple) semble ne mener nulle part (sauf pour les petites valeurs de n), ne serait-ce que parce que si g''_0 et f'''_0 sont encore assez simples (on obtient $f'''_0(p) = 2\oplus_2 p$; $g''_0(p) = 3-p$ si $p \leq 3$, et $1\oplus_2 p$ ensuite), g'''_0 et f''''_0 voient déjà apparaître des périodes multiples de 3...

Une toute autre méthode consisterait à définir, par exemple, une fonction $\mathcal{G}'$, avec $\mathcal{G}'(P) = n$ si la position obtenue en adjoignant à P un tas d'une pierre noire et de n pierres blanches est nulle. Il est clair qu'un tel nombre n est unique, que si $\mathcal{G}^-(P) = 1$, on aura $\mathcal{G}'(P) = 0$, que dans tous les cas, $\mathcal{G}'(P) < \mathcal{G}(P)$ (et donc, que si P est nulle, $\mathcal{G}'(P)$ n'est pas définie) et qu'enfin, si $\mathcal{G}(P) = 1$, $\mathcal{G}'(P)$ ne sera défini (et nul) que si $\mathcal{G}^-(P) = 1$. On voit par exemple que $\mathcal{G}'(P_{n,p}) = m \iff f'_m(n) = p$; se référant au tableau donné plus haut (et à la majoration presque évidente $f'_m(p) \leq m+p+1$), on pourrait d'abord croire que $\mathcal{G}'(P_{n,p})$ est toujours défini, sauf dans les cas «triviaux» $P_{n,n}$ (puisque $\mathcal{G}(P_{n,n}) = 0$) et $P_{2k,2k-1}$, mais on constate vite que $f'_m(2) = 7$ est impossible, et donc que $\mathcal{G}'(P_{2,7})$ n'est pas défini, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune position nulle de la forme  (ni d'ailleurs de la forme , car $f''_m(2) = 7$ est également impossible; en fait, les seules positions nulles de la forme $P_{2,7,b+(n)}$ sont

), et ce contre-exemple élimine tout espoir de récurrences faciles pour le calcul de $\mathcal{G}'(P)$, même quand il existe.

D'autres curieuses irrégularités n'apparaissent que pour des tas assez grands. Ainsi, notant les fonctions f', f'', etc. par la notation classique $f^{(k)}$, on découvre par exemple que $f_n^{(m)}(p) = \mathcal{G}(P_{n+(m),p})$ (qui est donc la «valeur» de la position formée d'un tas de p pierres blanches, et d'un tas gris de $n+m$ pierres, dont n blanches) ne dépend souvent que de $n+m$ pour p assez petit : voici, à titre d'exemple, un tableau des premières valeurs des $f_{6-k}^{(k)}$ et des $f_{7-k}^{(k)}$:

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f_5'(p)$	6	7	8	5	9	3	0	1	2	4	13	16	17	10	18	19	11	12	14	15	24
$f_4''(p)$	6	7	8	5	9	3	0	1	2	4	15	17	16	19	18	10	12	11	14	13	25
$f_3'''(p)$	6	7	8	5	9	3	0	1	2	4	15	17	16	19	18	10	12	11	14	13	25
$f_2^{(4)}(p)$	6	7	8	5	9	3	0	1	2	4	14	15	16	17	10	11	12	13	21	22	24
$f_1^{(5)}(p)$	6	7	8	5	9	3	0	1	2	4	14	15	16	17	10	11	12	13	21	22	24
$f_6'(p)$	7	8	9	10	11	12	13	0	1	2	3	4	5	6	17	20	23	14	21	24	15
$f_5''(p)$	7	8	9	10	11	12	13	0	1	2	3	4	5	6	19	20	22	23	21	14	15
$f_4'''(p)$	7	8	9	6	10	11	3	0	1	2	4	5	18	17	19	20	21	13	12	14	15
$f_3^{(4)}(p)$	7	8	9	6	10	11	3	0	1	2	4	5	18	16	19	20	13	22	12	14	15
$f_2^{(5)}(p)$	7	8	9	6	10	11	3	0	1	2	4	5	17	16	18	19	13	12	14	15	25
$f_1^{(6)}(p)$	7	8	9	6	10	11	3	0	1	2	4	5	17	16	18	19	13	12	14	15	25;

on pourrait par exemple en conclure que $f_4'' = f_3'''$, et de fait $f_4''(p) = f_3'''(p)$ pour tout $p \leq 43$, mais $f_4''(44) = 49$ alors que $f_3'''(44) = 41$... En revanche, il semble bien qu'on ait $f_2^{(n)} = f_1^{(n+1)}$ pour tout n (c'est en tout cas vrai pour $n \leq 30$ et $p \leq 400$), mais, là encore, je suis fort loin de savoir le démontrer...

Positions plates.

On va à présent s'intéresser aux positions n'ayant au plus qu'un tas de plus de deux pierres. Les méthodes du paragraphe précédent permettent plus aisément encore d'étudier, par exemple, les positions $P_{n\times 1,(p)}$ formés de n tas d'une seule pierre blanche et d'un tas de p pierres noires : en notant $\varphi_n(p) = \mathcal{G}(P_{n\times 1,(p)})$, on a $\varphi_0(p) = p-1$, $\varphi_1(p) = p$ et (on remarquera la différence avec f_n) $\varphi_n(p) = \operatorname{mex}(\varphi_{n-1}(p), \varphi_n(0), \varphi_n(1), \ldots, \varphi_n(p-1))$. Il est presque évident que $\varphi_{n+2}(p) = \varphi_n(p)$ pour n assez grand, et de fait, c'est le cas pour $n \geq 1$; il suffit donc de connaître $\varphi_2(p)$, or $\varphi_2(p) = 1 \oplus_2 p$, c'est-à-dire que $\varphi_2(2n+1) = 2n$ et $\varphi_2(2n) = 2n+1$. De même, si $\varphi_n(p) = \mathcal{G}^-(P_{n\times 1,(p)})$, on aura $\varphi_0'(p) = p$ pour $p > 1$ (et $\varphi_0'(0) = 1$, $\varphi_0'(1) = 0$), $\varphi_1'(p) = 1 \oplus_2 p$ pour $p > 1$ (et $\varphi_1'(0) = 0$, $\varphi_1'(1) = 1$), et $\varphi_{n+2}'(p) = \varphi_n'(p)$ pour tout n. Plus généralement, les fonctions $\psi_{P,Q}$ définies par $\psi_{P,Q}(n) = \mathcal{G}(P+nQ)$ sont toujours périodiques (au sens ordinaire, c'est-à-dire que $\psi(n+n_0+T) = \psi(n+n_0)$) comme on le voit facilement par récurrence, puisque $\psi_{P,Q}(n) = \operatorname{mex}((\psi_{P',Q}(n))_{P'\in\mathcal{S}(P)}, (\psi_{P+Q',Q}(n-1))_{Q'\in\mathcal{S}(Q)})$, et que cette relation n'exclut pour chaque n qu'un nombre borné de valeurs; toutefois, la valeur de n_0 est souvent difficile à prévoir...

Notant $f_P(n) = \mathcal{G}(P + n\times\circ)$, on a donc $f_P(n) = \operatorname{mex}(f_P(n-1), (f_{P'}(n))_{P'\in\mathcal{S}(P)})$, et on voit aisément que f_P est de période 2 pour tout P; par exemple, en prenant pour P la position , on a $\mathcal{S}(P) = \{P_1, P_2\} = \{$, $\}$, puis $\mathcal{S}($$) = \{P_1, P_3, P_4\} =$

$\left\{\overset{\bullet}{\bullet},\ \bullet,\ \bullet\ \bullet\right\}$; on en déduit le tableau des valeurs de f_{P_i} :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$f_{\{\}}(n)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
$f_{P_3}(n)$	0	2	1	0	1	0	1	0	1	0	...
$f_{P_4}(n)$	1	0	2	1	0	1	0	1	0	1	...
$f_{P_1}(n)$	1	0	2	3	2	3	2	3	2	3	...
$f_{P_2}(n)$	2	1	0	2	3	2	3	2	3	2	...
$f_P(n)$	0	2	1	0	1	0	1	0	1	0	...

Ce genre de calcul se simplifie dans certains cas : avec $P' = \overset{\circ}{\bullet}\ \overset{\bullet}{\bullet}$, on aura $\mathcal{S}(P') = \left\{P'_1 = \overset{\circ}{\bullet}, P'_2 = \overset{\circ}{\bullet}\ \bullet, P'_3 = \circ\ \overset{\bullet}{\bullet}, P_1, P_2\right\}$, mais en fait $f_{P'_3}(n) = f_{P_2}(n+1)$, comme on le voit aisément ; le calcul complet est détaillé ci-dessous (avec $P''_1 = \circ$ et $P''_2 = \circ\ \bullet$) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$f_{P''_1}(n)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...
$f_{P''_2}(n)$	2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
$f_{P'_1}(n)$	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	...
$f_{P'_2}(n)$	3	4	3	2	3	2	3	2	3	2	...
$f_{P'_3}(n)$	1	0	2	3	2	3	2	3	2	3	...
$f_{P'}(n)$	0	2	1	0	1	0	1	0	1	0	...

Pour conclure, calculons $f(n) = \psi_{\{\},P'_1}(n)$ (c'est-à-dire la valeur de la position formée de n tas gris de deux pierres). On voit que cela demande de déterminer les valeurs de $g(n-1) = \psi_{\bullet,P'_1}(n-1)$ et $h(n-1) = \psi_{\circ,P'_1}(n-1)$, puis celles de $g'(n-1) = \psi_{\bullet\,\bullet,P'_1}(n-2)$, etc ; en posant $\varphi(k,b,n) = \mathcal{G}(k \times P'_1 + b \times \circ + n \times \bullet)$, on a la récurrence $\varphi(k,b,n) = \operatorname{mex}(\varphi(k-1,b,n), \varphi(k-1,b+1,n), \varphi(k-1,b,n+1), \varphi(k,b-1,n), \varphi(k,b,n-1))$ (il faut y ajouter $\varphi(0,b,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } b > n \text{ et } b+n \text{ impair ou si } b < n \text{ et } b+n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } b < n \text{ et } b+n \text{ impair ou si } b > n \text{ et } b+n \text{ pair} \\ 2 & \text{si } b = n > 0 \\ 0 & \text{si } b = n = 0 \end{cases}$), et on cherche $f(n) = \varphi(n,0,0)$. Malgré la complexité de ces récurences, le résultat final est très simple : $\varphi(k+2,b,n) = \varphi(k,b,n)$ pour $k > 1$, et $\varphi(2,b,n) = b + n \bmod 2$, tandis que $\varphi(3,b,n) = \varphi(2,b,n) + 2$ (les seules irrégularités qui apparaissent étant, par exemple, $\varphi(1,b,b) = 4$), et donc $f(n) = 0$ si n est pair, et 2 si n est impair (ce qui, soit dit en passant, est le même résultat que si les tas étaient blancs. . .)