Le théorème de Sarkovski

«La période 3 implique le chaos»

Théorème. *Soit $f : J \to J$ (J intervalle de $\mathbf{R}$) une application continue. S'il existe un $a \in J$ tel que $a, b = f(a), c = f(f(a)) = f^2(a)$ et $d = f(f(f(a))) = f^3(a)$ vérifient soit $d \leq a < b < c$, soit $d \geq a > b > c$, alors f possède (sur J) des points périodiques pour toute période $k > 0$ (c'est-à-dire que $f^k(p) = p$, et que $f^m(p) \neq p$ si $0 < m < p$).*

Corollaire. *Si $f : J \to J$ a un point périodique de période 3, alors elle admet dans J des points périodiques pour toute période $k > 0$.*

Preuve du corollaire : Soit a un point de période 3 pour f. Il y a 6 ordres possibles pour $\{a, f(a), f^2(a)\}$. Deux d'entre eux correspondent aux hypothèses du théorème. Pour l'un des autres, par exemple $a < f^2(a) < f(a)$, remarquer qu'on peut aussi l'écrire $f^2(b) < f(b) < b$, et qu'on est donc dans le second cas. On vérifie facilement qu'il y a toujours un moyen de réécrire ainsi l'ordre pour que l'une des deux hypothèses soit satisfaite.

La démonstration du théorème utilise 3 lemmes simples :

Lemme 1. *Si I est un intervalle, si $f : I \to I$ est continue et si $I_0 \subseteq I$ est un intervalle compact, il existe un sous-intervalle compact Q de I tel que $f(Q) = I_0$.*

Démonstration. Soit $I_0 = [a, b]$, choisissons x_0, x_1 dans I tels que $f(x_0) = a$, $f(x_1) = b$. On peut supposer (sans perte de généralité) que $x_0 < x_1$; posons $Q_0 = [x_0, x_1]$. Alors Q_0 est compact et I_0 est un intervalle contenu dans $f(Q_0)$. Par compacité de Q_0 et continuité de f, il existe r_0 dans $(f|Q)^{-1}(x_0)$ et r_1 dans $(f|Q)^{-1}(x_1)$ tels que la distance entre $(f|Q)^{-1}(x_0)$ et $(f|Q_0)^{-1}(x_1)$ soit $|r_0 - r_1|$. Soit Q l'intervalle fermé d'extrémités r_0 et r_1. Alors $f(Q) = I_0$. En effet, I_0 est inclus dans $f(Q)$ puisque f envoie les extrémités de Q vers celles de I_0. Réciproquement, $f(Q)$ ne peut contenir aucun point extérieur à I_0, puisqu'il faudrait alors qu'il existe des points dans l'intérieur de Q que f envoie vers une au moins des extrémités de I_0, ce qui contredirait le choix de r_0 et r_1.

Lemme 2. *Soit J un intervalle, f une application continue de J dans J et and $(I_n)_{n \geq 0}$ une suite d'intervalles compacts inclus dans J telle que $I_{n+1} \subseteq f(I_n)$ pour tout $n \geq 0$. Il existe une suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ d'intervalles compacts telle que $Q_{n+1} \subseteq Q_n \subseteq I_0$ et que $f^n(Q_n) = I_n$ pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. Posons $Q_0 = I_0$. Comme I_1 est inclus dans $f(Q_0)$, nous pouvons appliquer le lemme 1 pour obtenir un intervalle compact

Q_1 inclus dans $Q_0 = I_0$ tel que $f(Q_1) = I_1$. Si (hypothèse de récurrence) on a construit une suite $(Q_p)_{0 \leq p \leq k}$ telle que $f^k(Q_k) = I_k$, I_{k+1} est inclus dans $f(I_k) = f^{k+1}(Q_k)$, donc, appliquant à nouveau le lemme 1, il y a un intervalle compact Q_{k+1} inclus dans Q_k tel que $f^{k+1}(Q_{k+1}) = I_{k+1}$. Par récurrence, la suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ ainsi construite convient.

Lemme 3. *Si J est un intervalle, si $f : J \to \mathbf{R}$ est continue et si I est un intervalle compact inclus dans J tel que $J \subseteq f(I)$, alors f a un point fixe dans I.*

Démonstration. Soit $I = [a, b]$ et choisissons x^-, x^+ dans I tels que $f(x^-) = a$ et $f(x^+) = b$. On peur supposer, sans perte de généralité, que $x^- < x^+$. Alors $f(x^-) \leq x^-$ et $f(x^+) \geq x^+$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un x^* dans $[x^-, x^+]$ tel que $f(x^*) = x^*$.

Démonstration du théorème. Supposons (la démonstration de l'autre cas est similaire) que la condition $f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a)$ soit vraie. Posons $K = [a, b]$ et $L = [b, c]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, L est inclus dans $f(K)$ et K et L sont inclus dans $f(L)$. Soit k un entier positif arbitraire (fixé) nous allons montrer que f admet un point périodique de période k dans J.

Définissons une suite $(I_n)_{n>=0}$ d'intervalles compacts de la façon suivante : Si $k = 1$, on pose $I_n = L$ pour tout n. Sinon (si $k > 1$), on définit $I_n = L$ pour $n < k-1$, $I_{k-1} = K$, et on étend «périodiquement» cette définition en posant $I_{n+k} = I_n$ pour $n \geq 0$.

Ayant défini (I_n), nous pouvons appliquer le lemme 2 (dont on remarque que les hypothèses sont satisfaites), obtenant la séquence correspondante $(Q_n)_{n \geq 0}$, ayant (entre autres) la propriété que Q_k est un intervalle inclus dans Q_0 et que $f^k(Q_k) = I_k = Q_0$. D'après le lemme 3, l'application f^k admet un point fixe p_k dans Q_k. Nous affirmons que p_k est un point de période k (exactement) pour f. En effet, soit r la période de p_k. Alors $k = mr$ pour un certain $m > 0$ et nous voulons montrer que $m = 1$. Si $m > 1$, alors (puisque $r < k$) $f^{r-1}(p_k)$ appartient à $I_{r-1} = L$ et $f^{k-1}(p_k)$ appartient à $I_{k-1} = K$. Donc $f^{k-1}(p_k) = f^{r-1}(p_k)$ appartient à l'intersection $K \cap L$, ce qui montre que $f^{k-1}(p_k) = b$ et entraîne que $p_k = f(b) = c$. Mais alors, p appartient à L et $f(p)$ appartient à K; ceci ne peut se produire que si $k = 2$, ce qui est absurde (puisque 2 est premier). Ainsi, p_k est de période k.