La fonction de Weierstrass n'est nulle part dérivable

Théorème (Weierstrass). *La fonction définie par* $f := x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi N^n x}{c^n}$ *(où N est entier pair et $1 < c < \frac{N}{1+6\pi}$) est continue sur* $\mathbf{R}$*, mais n'est nulle part dérivable*

Ce résultat découle du lemme suivant :

Lemme. *Si f est dérivable en a, et si (x_n) et (y_n) sont deux suites convergeant vers a telles que pour tout n, $y_n \leq a \leq x_n$ et $y_n < x_n$, alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = f'(a)$.

Démonstration. Si f est dérivable en a, c'est que (au voisinage de a), on peut écrire $f(a+\varepsilon) = f(a) + \varepsilon f'(a) + \varepsilon h(\varepsilon)$, où h est une fonction telle que $\lim_0 h = 0$. On a donc, en posant $x_n = a + \alpha_n$ et $y_n = a - \beta_n$ (avec α_n et β_n positifs),

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = \frac{(\alpha_n+\beta_n)f'(a) + \alpha_n h(\alpha_n) + \beta_n h(\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n} = f'(a) + r_n,$$

avec $r_n = \frac{\alpha_n h(\alpha_n) + \beta_n h(\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$; on a $|r_n| \leq \frac{\alpha_n|h(\alpha_n)|}{\alpha_n+\beta_n} + \frac{\beta_n|h(\beta_n)|}{\alpha_n+\beta_n} \leq |h(\alpha_n)|+|h(\beta_n)|$, ce qui montre que $\lim r_n = 0$, et donc le lemme.

Démonstration du théorème. f est continue en tout point, car c'est une série de fonctions continues convergeant normalement (en effet, elle est majorée en valeur absolue par une série géométrique). On va montrer (par l'absurde) que f n'est pas dérivable en a (fixé quelconque), en construisant deux suites x_n et y_n respectant les conditions du lemme, et telles que $\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} > C^n$ (avec $C > 1$), ce qui montrera que $f'(a)$ n'existe pas. Posons k_n égal au plus grand entier (relatif) $\leq aN^n + 1/4\pi$, et $x_n = \frac{4k_n+5}{4N^n}$, $y_n = \frac{4k_n-1}{4N^n}$. On vérifie aisément (par définition de k_n) que $y_n \leq a < x_n$ et que $x_n - y_n = 3/2N^n \to 0$; il reste donc à évaluer $t_n = \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}$.

On a $t_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_k(x_n)-f_k(y_n)}{x_n-y_n}$, avec $f_k(x) = \frac{\sin 2\pi N^k x}{c^k}$. Pour $k > n$, on aura $f_k(x_n) = \sin(N^{k-n}(2\pi k_n + 5\pi/2)) = 0$, puisque N est pair, et de même $f_k(y_n) = 0$; pour $k = n$, on voit aisément que $f_n(x_n) = 1$ et $f_n(y_n) = -1$ donc finalement $t_n = \frac{2}{c^n(x_n-y_n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k(x_n)-f_k(y_n)}{x_n-y_n}$, et $t_n \geq 12(N/c)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|f_k(x_n)-f_k(y_n)|}{x_n-y_n}$.

Or le théorème des accroissement finis montre que $\frac{|f_k(x_n)-f_k(y_n)|}{x_n-y_n} = |f'(c_n)|$ (avec $y_n < c_n < x_n$), et donc que $\frac{|f_k(x_n)-f_k(y_n)|}{x_n-y_n} = 2\pi(N/c)^k|\cos(2\pi N^n c_n)| \leq 2\pi(N/c)^k$; on en déduit que $t_n \geq (N/c)^n/3 - \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi(N/c)^k = \frac{(N/c)^n}{3} - 2\pi\frac{(N/c)^n-1}{(N/c)-1}$; la condition $c < \frac{N}{1+6\pi}$ implique alors que la suite t_n diverge, et donc finalement que f n'est pas dérivable en a (Remarque : la condition donnée sur c est en fait bien trop forte : on démontre par exemple que $N = 4$ et $c = 4/3$ convient également, mais ce résultat découle de majorations plus fines et plus délicates).