Ces fiches sont toutes construites sur le même modèle, détaillé ci-dessous. On en tirera le meilleur parti en essayant (dans cet ordre) :

1. de comprendre l'énoncé proposé ;
2. d'essayer, d'abord sans aide, de déterminer un «plan d'attaque» ; une fois ceci fait, ou si l'on n'y parvient pas, on pourra lire le paragraphe «Méthode» ;
3. de tenter d'obtenir, puis de rédiger, une solution complète, que l'on pourra alors comparer à celle fournie, tant du point de vue du fond (la «réponse») que de celui de la forme ;
4. on ne négligera pas, enfin, de lire les éventuelles remarques finales.

Chaque fiche porte sur une technique précise, illustrant certains résultats du chapitre de cours correspondant ; mais elles ont aussi été choisies pour faire apparaître des méthodes très générales, des idées de recherche, ou des rédactions délicates ; les titres (en $\boxed{\textbf{encadré}}$) permettront peut-être de repérer l'objectif véritable de la fiche...

Énoncé.

Ce paragraphe, en caractères romains, propose un sujet d'exercice, tel qu'il pourrait se présenter à l'intérieur d'un problème d'écrit plus vaste, ou sous forme d'un exercice d'oral. On a essayé, autant que possible, de fournir des rédactions représentatives (en laissant même parfois subsister des imprécisions ou des ambiguïtés volontaires) ; il convient de s'habituer à lire **complètement** de tels sujets, au besoin en en relevant au passage les mots-clés.

Méthode.

Ce paragraphe, en caractères inclinés, donne des idées de recherche de solution, et parfois met en garde contre des «pièges» qui pourraient faire trébucher l'étudiant trop pressé; les «trucs» qui y figurent sont le plus souvent fort classiques, et ne devraient plus surprendre après une année de prépa ; toutefois, certains seraient quasiment introuvables si on ne vous mettait pas sur la voie (ce qui est signalé dans le titre par le symbole †, et rappelé dans les exercices du cours) ; ne pas se décourager, donc, si votre recherche préliminaire avait échoué (en particulier, cela arrive souvent lors d'exercices d'oraux, où l'examinateur ne s'attend guère à ce que vous trouviez l'astuce alambiquée qu'il a préparé, et veut seulement voir si vous maîtrisez la démarche «normale», et si vous saurez mettre en œuvre sa méthode quand il vous la fournira).

Solution.

Ce paragraphe, en caractères «bâtons», donne une rédaction aussi rigoureuse que possible de la solution. Vous êtes néanmoins libres de critiquer le modèle proposé : il est en effet applicable au niveau de connaissance correspondant aux chapitres du cours de Sup déjà traités, et donc insuffisamment détaillé si vous n'avez pas encore étudié ces questions (ou si vous en avez tout oublié !), et trop détaillé pour le niveau «Spé», par exemple. Il s'agit donc plutôt d'un modèle de ce qu'on attend de vous (idéalement, bien sûr), et non d'un «corrigé». En particulier, on remarquera qu'à de rares exceptions près, les méthodes qui ont servi à établir la solution ne figurent pas dans la rédaction définitive...

Remarques.

Ce dernier paragraphe, en caractères inclinés, donne des indications complémentaires : des solutions alternatives, d'autres rédactions envisageables, d'autres exercices analogues, des compléments «culturels» sur le problème posé, etc.

Exercices types : Fiche n° 1

Du brouillon à la rédaction rigoureuse

Énoncé.

Montrer que pour a et b réels tels que $0 < a < b$, on a l'encadrement

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Méthode.

1 *La résolution de ce type d'exercice passe par une manipulation «au brouillon» de l'encadrement à obtenir, jusqu'à une «évidence»; la rédaction rigoureuse viendra ensuite. Ne pas chercher, par conséquent, une présentation ou une justification sérieuse de ce qui suit (en* **3***), qui ne doit* **en aucun cas** *figurer dans la rédaction définitive*

2 *Dans des cas plus difficiles, il est souvent conseillé de relever d'abord toutes les hypothèses de l'énoncé (et de les mettre en ordre); ici, on se contentera de remarquer que si a et b sont supposés positifs, ce n'est sans doute pas un hasard!*

3 Calculs «au brouillon» *:*
En «partant de la fin», et en élevant au carré l'encadrement souhaité, on obtient $a^2 < ab < \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} < b^2$, *soit* $4a^2 < 4ab < a^2+2ab+b^2 < 4b^2$ *ou encore, soustrayant* $4ab$, $4a^2-4ab < 0 < a^2-2ab+b^2 < 4b^2-4ab$. *Factorisant, on trouve* $4a(a-b) < 0 < (a-b)^2 < 4b(b-a)$, *ce qui suffit à donner une idée de démonstration. Toutefois, la rédaction obtenue ainsi ne semblera peut-être pas très naturelle; bien d'autres démarches (par exemple une étude de signe) pourraient être envisagées, même pour ce simple exercice; l'objectif de cette fiche est de montrer comment transformer des tâtonnements en une démonstration rigoureuse. On dit souvent que cette phase de recherche préliminaire constitue l' «analyse» du problème, et que la rédaction de la solution en est la «synthèse».*

Solution : Rédaction «correcte» de la démonstration demandée.

En soustrayant a à l'inégalité de l'énoncé, on obtient $-a < 0 < b-a$, et comme a est positif, $-4a < 0 < b-a < b < 4b$. $(b-a)$ étant strictement positif par hypothèse, on peut multiplier chaque terme des inégalités par $(b-a)$ sans en changer le sens, et donc

$$-4a(b-a) < 0 < (b-a)^2 < 4b(b-a),$$

ce qui, en développant, donne

$$4a^2 - 4ab < 0 < a^2 - 2ab + b^2 < 4b^2 - 4ab,$$

additionnant $4ab$, on trouve

$$4a^2 < 4ab < a^2 + 2ab + b^2 < 4b^2,$$

et divisant enfin par 4, on obtient

$$a^2 < ab < \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4} < b^2.$$

Or ces nombres sont positifs, et on sait (la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante) que $0 < A < B \Rightarrow 0 < \sqrt{A} < \sqrt{B}$; il en résulte que

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b,$$

ce qui est l'encadrement demandé.

Remarques.

1 *La rédaction procèdait, ici, presque exactement à l'envers de la recherche; mais on devra parfois recourir à des tâtonnements plus hasardeux, où on manipule l'énoncé et l'objectif recherché, pour les faire coïncider. L'utilisation du brouillon peut devenir délicate, et il est vivement recommandé d'apprendre à l'organiser (en en numérotant les pages, par exemple) : certaines épreuves de concours sont fort longues, et il serait désolant de perdre de précieuses minutes à rechercher un résultat ou un calcul déjà effectué.*

2 *La croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ est un argument que la recherche préliminaire n'avait pas laissé prévoir; en effet, la démarche du brouillon (ici, l'élévation au carré) n'est pas toujours aisément «réversible», et on voit souvent apparaître des cas particuliers, ou la nécessité d'un argument supplémentaire; c'est en général à ce moment que certaines indications de l'énoncé prennent tout leur sens!*

3 *La rédaction «rigoureuse» ne doit utiliser que les hypothèses (ici, $0 < a < b$); on évitera de l'abréger par une utilisation trop systématique du signe $\Rightarrow$ (ce qui ne fait d'ailleurs guère gagner de place); par contre, dans une suite de «calculs», on aura intérêt à l'utiliser pour marquer le passage d'une écriture à une autre, sur le modèle*

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= (x+y)^2(x+y)^2 \\ &= (x^2+2xy+y^2)(x^2+2xy+y^2) \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ &\Rightarrow \\ (X+1)^4 &= X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1\end{aligned}$$

4 *Quand à la «formule» elle-même, il s'agit de ce qu'on appelle des «inégalités de moyenne» ($m = (a+b)/2$ est la moyenne «ordinaire» de a et b, dite arithmétique, $g = \sqrt{ab}$ s'appelle la moyenne géométrique de a et b). D'autres moyennes existent, par exemple la moyenne harmonique $h = 2ab/(a+b)$; il est facile de montrer que $a < h < b$, et un prolongement à l'exercice qui vient d'être traité consisterait à «classer» h par rapport à m et g; il n'est pas défendu de procéder d'abord à quelques essais*...*

* La réponse est $m < h < b$

Exercices types : Fiche n° 2

Valeurs absolues et séparation des cas

Énoncé

Résoudre (dans $\mathbf{R}$) l'inéquation $|x+1|+1 \geq |x^2-6x|$.

Méthode

1 *Après avoir contrôlé qu'il n'y a pas de «piège», c'est-à-dire que l'inéquation n'a pas de solution évidente (contrairement par exemple à $|x+1|+1 \geq -|x^2-6x|$, toujours vraie !), on doit se résigner à «séparer en cas», pour éliminer les valeurs absolues.*

2 *Pour cela, on commence par étudier le signe des expressions «dans les valeurs absolues» (ce qui sera ici très facile), puis on transforme l'inéquation initiale en un ensemble (et* **non** *un système) d'inéquations algébriques, qu'on résoud successivement. Il ne reste plus qu'à contrôler que les différentes solutions obtenues sont «compatibles» avec les signes supposés des expressions, autrement dit qu'on est bien dans les bons intervalles.*

3 *Mais, y compris dans des cas moins complexes que cet exemple, il est vivement recommandé de mener la discussion sous forme de tableau ; en pratique, on construit au brouillon le tableau partiel, et on «rajoute» éventuellement des cases en fonction des éventualités qui apparaissent. Comme toujours, on rédigera la solution finale en concentrant la discussion sur les points délicats : il est ici par exemple tout à fait inutile de justifier la ligne «signe de $x+1$», et on peut même esquiver l'étude du signe de x^2-6x. En revanche, il vaut mieux justifier la résolution des 3 inéquations algébriques, et surtout expliquer clairement le choix final des intervalles-solutions retenus.*

4 *Cela dit, et surtout à la vue des solutions obtenues, une erreur (numérique ou de raisonnement) pouvait être envisagée ; une étude préliminaire (à la calculatrice graphique) confirme qu'il n'en est rien ; ce genre de contrôle permet souvent de s'épargner bien des angoisses, et éventuellement de ne pas se décourager devant la perspective de longs et pénibles calculs (ou au contraire de se demander s'ils sont vraiment indispensables) !*

Solution

Établissons le tableau des formes prises par l'inéquation en fonction des valeurs de l'inconnue x, en remarquant que si $A \geq 0$, alors $|A| = A$, et que si $A \leq 0$, alors $|A| = -A$:

x	$-\infty$		-1		0		6		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Valeur de $\|x+1\|$		$-1-x$	0	$x+1$		$x+1$		$x+1$	
Signe de x^2-6x		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Valeur de $\|x^2-6x\|$		x^2-6x		x^2-6x	0	$6x-x^2$	0	x^2-6x	
Réécriture de l'inéquation		$-x \geq x^2-6x$ (1)		$x+2 \geq x^2-6x$ (2)		$x+2 \geq 6x-x^2$ (3)		$x+2 \geq x^2-6x$ (2)	

L'inéquation (1) équivaut à $x(x-5) \leq 0$, dont un tableau de signe (trivial) donne la solution $\mathcal{S}_1 = [0,5]$. Or, l'intersection de cet intervalle et de $I_1 =]-\infty, -1]$, correspondant à ce cas, est vide ; aucune solution de l'inéquation n'appartient donc à l'intervalle I_1.

Avant de résoudre les inéquations (2) et (3), rappelons d'abord que si le trinôme $ax^2 + bx + c$ est de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ positif, il peut se factoriser sous la forme $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, et qu'on a alors le tableau de signe

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation (2) équivaut à $x^2 - 7x - 2 \leq 0$, dont on vient de voir que la solution est l'intervalle $\mathcal{S}_2 = [\alpha_1, \alpha_2]$ compris entre les racines du trinôme, égales ici à $\alpha_1 = \dfrac{7 - \sqrt{57}}{2} \simeq -0,275$, et à $\alpha_2 = \dfrac{7 + \sqrt{57}}{2} \simeq 7,275$; mais on ne doit en prendre que les parties comprises dans les intervalles $I_2 = [-1, 0]$ et $I_4 = [6, +\infty[$; la solution correspondant à ce cas est donc $\mathcal{S}_2' = \mathcal{S}_2 \cap (I_2 \cup I_4) = [\alpha_1, 0] \cup [6, \alpha_2]$.

Enfin, l'inéquation (3) équivaut à $x^2 - 5x + 2 \geq 0$, dont la solution est la réunion des deux intervalles situés à l'extérieur des racines du trinôme, égales ici à $\beta_1 = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2} \simeq 0,439$, et à $\beta_2 = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2} \simeq 4,562$: $\mathcal{S}_3 =]-\infty, \beta_1] \cup [\beta_2, +\infty[$; la solution correspondant à ce cas est donc $\mathcal{S}_3' = \mathcal{S}_3 \cap I_3$ (avec $I_3 = [0, 6]$), soit $\mathcal{S}_3' = [0, \beta_1] \cup [\beta_2, 6]$.

Et en définitive, l'inéquation initiale a donc pour solution la réunion de ces solutions partielles, soit

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_2' \cup \mathcal{S}_3' = [\alpha_1, \beta_1] \cup [\beta_2, \alpha_2] = [\frac{7 - \sqrt{57}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}] \cup [\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{7 + \sqrt{57}}{2}].$$

Remarques

1 *Le paragraphe de rappel sur le signe du trinôme ne s'impose pas absolument ; c'est plutôt une précaution à prendre quand on ne sait pas si ces résultats sont déjà supposés maîtrisés (l'énoncé le précise en général) ; s'il n'y a pas de doute, on utilisera simplement une formule telle que* « on sait, d'après le cours, que le trinôme ... est positif à l'extérieur des racines... », *par exemple. Il n'y a par ailleurs rien de plus désolant que de voir un élève calculer scrupuleusement Δ et ressortir les «formules» pour aboutir après une dizaine de lignes à $x^2 - 5x = x(x-5)$...*

2 *Il ne serait pas impossible de faire figurer dans le tableau la résolution des équations (1), (2) et (3), mais, outre que cela alourdirait la lecture, le risque d'oubli de la «synthèse» (c'est-à-dire de la recherche de $\mathcal{S}$) serait bien réel.*

3 *À proprement parler, les calculs «ensemblistes» de $\mathcal{S}_2'$, $\mathcal{S}_3'$ et $\mathcal{S}$ n'ont pas été justifiés ; il s'agit là d'un exercice de logique sans grand intérêt à ce niveau, mais que nous apprendrons à effectuer de manière plus rigoureuse à partir du chapitre 6 ; on se reportera à la fiche n° 12 pour un exemple de ce genre de raisonnement.*

4 *Comme cela fut exposé au chapitre 1, il ne faut pas hésiter à introduire des lettres abréviatrices (α_2, I_1, $\mathcal{S}$, etc.) ; il serait souvent ridicule de s'obstiner à recopier sans cesse les valeurs exactes, mais monstrueuses, auxquelles on est parvenu...*

Exercices types : Fiche n° 3

Mise en équation d'un problème géométrique

Énoncé.

Montrer analytiquement que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Méthode.

1 *L'énoncé ne l'imposant pas, il faut d'abord choisir un repère (en n'oubliant pas qu'il doit être orthonormé) ; on peut toujours prendre l'origine en A et B sur l'axe des x.*

2 *Il faut ensuite déterminer les équations cartésiennes des médiatrices. Une version naturelle consiste à dire que la médiatrice de PQ est $\perp$ à PQ, et passe par son milieu.*

3 *Il ne restera plus qu'à résoudre un système de trois équations à deux inconnues, et à interpréter le résultat.*

Solution.

Soit (ABC) un triangle quelconque. Choisissons le repère orthonormé $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}/\|\overrightarrow{AB}\|$. Dans ce repère, on a $A = \left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$, $B = \left|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right.$ (avec $a = AB$) et $C = \left|\begin{matrix}b\\c\end{matrix}\right.$ (avec $c \neq 0$, pour que C n'appartienne pas à AB). La médiatrice de BC est donc la droite passant par $M = \left|\begin{matrix}(a+b)/2\\c/2\end{matrix}\right.$, le milieu de BC, et de vecteur normal $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = \left|\begin{pmatrix}b-a\\c\end{pmatrix}\right.$; on sait qu'elle a pour équation $(b-a)x + cy = (b-a)(b+a)/2 + c^2/2 = (b^2+c^2-a^2)/2$. On obtient de même l'équation de la médiatrice de AC (de vecteur normal $\left|\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}\right.$) : $bx + cy = (b^2+c^2)/2$ et (de manière évidente) l'équation de la médiatrice de AB : $x = a/2$. Si $P\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ est situé sur ces trois droites, c'est que

$$\begin{cases} x = a/2 \\ bx + cy = (b^2+c^2)/2 \\ (b-a)x + cy = (b^2+c^2-a^2)/2. \end{cases}$$

On déduit des deux premières équations que $x = a/2$ et $y = (b^2+c^2-ab)/2c$, ce qui montre que les médiatrices de AB et AC sont concourantes; pour montrer que les trois médiatrices le sont, il faut donc vérifier que ces valeurs satisfont la troisième équation, c'est-à-dire que $(b-a)a/2+(b^2+c^2-ab)/2 = (b^2+c^2-a^2)/2$, ce qui est vrai en effet.

Remarques

1 *Le choix du repère est une étape importante dans ce genre de problèmes : avec un repère quelconque, les trois médiatrices auraient la même forme (ce qui peut parfois être un avantage) :* $(x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y = (x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2)/2$, *mais la résolution du système amènerait à des calculs inextricables...*

2 *On aura souvent intérêt à s'aider de propriétés géométriques connues : la médiatrice de* PQ *est l'ensemble des points* M *tels que* $MP = MQ$*, ce qui conduit à des équations de la forme* $(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = (x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2$ *(qui se simplifie pour donner l'équation précédente). Mais dans cet exercice, ce serait aller contre l' «esprit» de l'énoncé (il est évident que* $PA = PB$ et $PB = PC \Rightarrow PA = PC$*)*

3 *La résolution des équations doit être «interprétée». Il arrive souvent, dans un problème de ce genre, que (pour un certain cas particulier) les deux premières équations n'aient pas de solution commune; avant d'en conclure à une exception ou à une erreur d'énoncé, on fera bien de se demander à quoi correspond ce cas (le parallélisme des deux premières droites) et si, par hasard, on n'aurait pas alors les trois droites parallèles...*

4 *En dehors de cas relativement simples, cette méthode (surtout employée sans aucun «raccourci» d'origine géométrique) conduit souvent à des calculs redoutables; l'esprit du programme n'est pas d'obliger les élèves à résoudre d'interminables équations, mais à apprendre à les poser; on verra dans la fiche n° 14 par exemple, comment l'utilisation d'un logiciel de calcul formel tel que Maple permet ensuite de conduire les calculs jusqu'à leur conclusion.*

Exercices types : Fiche n° 4

Changement d'inconnue : comment se ramener au cours

Énoncé.

Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $(z-1)^n = (z+1)^n$ (z inconnue, n entier > 0); montrer que toutes les solutions sont imaginaires pures.

Méthode.

1 *Après avoir contrôlé que cette équation ne fait pas partie de la liste étudiée en classe, il ne reste plus qu'à déterminer à quel point du programme elle renvoie. Évidemment, cela suppose un peu de «psychologie», et il ne faudrait pas croire que tous les problèmes (même au niveau des concours) cèdent ainsi; inversement, la tâche est paradoxalement d'autant plus facile qu'on a moins de connaissances : ici, le symbole* $()^n$ *doit immédiatement renvoyer au paragraphe «racines* $n^{\text{èmes}}$*», alors que, dès qu'on aura étudié le chapitre 6, on devra aussi envisager la formule du binôme, des manipulations de polynômes, etc.*

2 *Le «bricolage», au brouillon, va donc consister à se ramener à une équation de la forme* $Z^n = a$. *À ce stade, inutile de faire preuve de rigueur, et on voit qu'une division par* $(z-1)^n$ *suffit. Mais le vrai problème est de savoir si on pourra revenir de* Z *à* z*, et c'est cette question qu'il faut d'abord traiter. Quand on s'est convaincu qu'on le peut, il n'y a plus qu'à passer à la rédaction (la discussion éventuelle en fonction de* n*, si elle doit avoir lieu, apparaîtra naturellement quand on essaiera de justifier chaque étape de la solution).*

3 *Évidemment, il est probable que, la solution une fois trouvée, un simple contrôle la montrera formée d'imaginaires purs (ne pas oublier de relire le cours (**1.3**) pour retrouver la définition de ceux-ci, si on l'avait oubliée). Mais il est souvent plus astucieux (et plus conforme à ce qu'on appelle l' «esprit» de l'énoncé) de chercher une démonstration «a priori»; ici, on pensera à utiliser la conjugaison...*

Solution.

Remarquons d'abord que $z = 1$ n'appartient pas à la solution, puisque $0^n \neq 2^n$ si $n > 0$. On a donc $(z-1)^n = (z+1)^n \iff \dfrac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

Posons alors $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$; l'équation étudiée est donc équivalente au système

$$\begin{cases} Z^n = 1 \\ Z = \dfrac{z+1}{z-1} \end{cases}.$$

Or on sait que la première équation a pour solutions les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité; le système est donc équivalent à ($Z \in \{1, e^{2i\pi/n}, \dots, e^{(2(n-1)i\pi/n}\}$ et $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$).

Comme (en supposant $z \neq 1$) on a $Z = \dfrac{z+1}{z-1} \iff Z(z-1) = z+1 \iff$

$z(Z-1) = 1+Z$, on voit que $Z = 1$ ne correspond à aucune valeur de z, et que pour chacune des $(n-1)$ solutions Z_k définies par $Z_k = e^{2ik\pi/n}$, avec k entier, et $1 \leq k \leq n-1$, on obtient une solution z_k donnée par la formule $z_k = \dfrac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1}$, ce que l'on notera de préférence par la description «paramétrique»

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1} \right\}_{k\in\{1,2,\ldots,n-1\}}.$$

[La méthode précisée dans la fiche n° 4 suggère de simplifier encore cette écriture en] mettant en facteur $e^{ik\pi/n}$, on aboutirait alors à $z_k = \dfrac{\cos(k\pi/n)}{i\sin(k\pi/n)}$, que l'on voit ainsi clairement être un imaginaire pur (c'est à dire de la forme ib, avec b réel).

Mais en fait, on pouvait simplement remarquer que $z \in \mathcal{S} \Rightarrow |Z| = 1 \iff |z-1| = |z+1|$; en utilisant la formule $|A|^2 = A\bar{A}$, et les propriétés de la conjugaison, on obtient $z \in \mathcal{S} \Rightarrow (z-1)\overline{(z-1)} = (z+1)\overline{(z+1)} \Rightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1)$. Développant cette dernière égalité, on trouve $2(z+\bar{z}) = 0$, donc $\bar{z} = -z$; et on sait que ceci caractérise les imaginaires purs.

Remarques

1 *On pourrait s'inquiéter de la division par $e^{2ik\pi/n} - 1$ dans la description de la solution; l'élimination de la valeur $k = 0$ qui venait d'être faite garantit que ce dénominateur n'est pas nul. Dans des exercices analogues, il faudrait parfois continuer par une discussion (en fonction de n) pour déterminer si toutes les valeurs de z trouvées conviennent bien à l'équation initiale (ainsi, par exemple, on pourrait se demander ici si $z = 1$ ne risque pas de se produire; mais si l'analyse a été menée avec assez de rigueur, on sait que ce n'est pas le cas).*

2 *Bien entendu, la démonstration de ce que $z_k \in i\mathbf{R}$ peut se faire «en force», en revenant à la forme algébrique (et en multipliant le dénominateur par la quantité conjuguée). Mais ces exercices-types sont aussi destinés à enrichir le répertoire d'astuces «classiques» du lecteur, même s'il est vrai qu'il faut souvent maîtriser d'abord des méthodes plus longues, mais plus systématiques.*

3 *De ce point de vue, on pourra ainsi remarquer, par exemple, l'interprétation géométrique du raisonnement proposé : dire que $z_1/z_2 \in i\mathbf{R}$, c'est dire que l'angle $(\widehat{\vec{v_1}, \vec{v_2}}) = \pm\pi/2$, où les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont les images (vectorielles) de z_1 et z_2 ; on en déduit ici qu'en appelant M l'image de Z et A et B les images des nombres 1 et -1, on a $(AM) \perp (BM)$, c'est-à-dire que M appartient au cercle de diamètre AB ; la conclusion demandée vient alors de ce que ce cercle est le cercle unité, image des Z tels que $|Z| = 1\ldots$*

Exercices types : Fiche n° 5

Sommes trigonométriques

Énoncé.

Mettre sous forme explicite factorisée $S = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$.

Méthode.

1 *Le sens exact de ce genre d'énoncé doit un peu être «deviné» (tout comme ceux commençant par «simplifier.. .») : jusqu'où faut-il pousser les transformations ? En général, il y a en fait un objectif au calcul demandé (résolution d'équation, utilisation d'une formule connue, etc.), et c'est en fonction de cet objectif qu'on choisira la forme finale à obtenir. . .*

2 *Le plan général d'attaque de ce type de problème est le suivant :*

a) On introduit une somme «complémentaire» $S' = 0 + \sin x + \cdots + \sin nx$, et on va calculer S comme étant la partie réelle de $Z = S + iS'$.

b) Posant $z = e^{ix}$, Z est un polynôme en z ; ici $Z = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ (d'après la formule de Moivre) ; on essaie à ce stade d'obtenir une formule connue.

c) Appliquant la formule des suites géométriques, on a donc

$$Z = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

si *$z \neq 1$; cette importante exception doit être immédiatement (au stade du brouillon) relevée, et devra être soigneusement traitée dans la rédaction définitive).*

d) Une dernière «astuce», utilisable pour toutes les formes du type $e^a \pm 1$, consiste à mettre en facteur $e^{a/2}$: ici, par exemple, $e^{ix} - 1 = e^{ix/2}(e^{ix/2} - e^{-ix/2}) = e^{ix/2}.2i\sin(x/2)$; de façon générale, cela fait apparaître des produits d'exponentielles complexes par des fonctions trigonométriques, et ce «truc» fait partie des recettes (on parlait jadis d' «astuces taupinales») à ne pas oublier

e) Le reste n'est plus qu'un calcul direct, en n'oubliant bien sûr pas l'objectif cherché . . .

Solution.

Posons $S' = 0 + \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$; on a donc $S = \mathrm{Re}(S + iS')$. La somme $Z = S + iS'$ vaut $1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \cdots + (\cos nx + i\sin nx)$; en posant $z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$, et en utilisant la formule de Moivre, on voit que $Z = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$.

Si $z = 1$, il est clair que $Z = n+1$, et donc que $S = n+1$. Si $z \neq 1$, on peut utiliser la formule des suites géométriques, obtenant $Z = \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$; par substitution, on aura donc $Z = \dfrac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$.

Or on sait que $e^{iax} - 1 = e^{\frac{iax}{2}}(e^{\frac{iax}{2}} - e^{-\frac{iax}{2}}) = e^{\frac{iax}{2}} 2i\sin\frac{ax}{2}$; utilisant cette méthode, on obtient

$$Z = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = e^{\frac{inx}{2}} \frac{2i\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{2i\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Remplaçant alors $e^{\frac{inx}{2}}$ par $\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}$, et prenant la partie réelle, on obtient (si $z \neq 1$)

$$\mathrm{Re}(Z) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Or $z = 1 \iff x = 2k\pi$; on en déduit que

$$S = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} & \text{si } x \neq 2k\pi \\ n+1 & \text{si } x = 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

Remarques

1 *Cet exercice traditionnel est donné ici sous une forme «ouverte», mais on le rencontre fréquemment aussi avec un énoncé tel que* «Montrer que (pour $0 < x < \pi/2$) $S = 1 + \cos 2x + \cdots + \cos 2nx$ peut se mettre sous la forme $\dfrac{\sin(2n+1)x - \sin x}{2\sin x}$», *par exemple. Outre le plan qu'on vient de voir, il faudra alors en général un peu de manipulation (dans* **C**) *pour atteindre la forme demandée; on essaiera d'alléger la rédaction en «trichant» un peu, comme cela a été exposé dans la fiche n° 1.*

2 *La méthode doit souvent être légèrement adaptée : recherche de la partie imaginaire dans le cas d'une somme de sinus, choix de $z = e^{ax}$, etc. D'autre part, on n'utilise pas toujours la formule des suites géométiques, mais il ne suffit pas de connaître une «formule» (de factorisation) pour le polynôme en Z obtenu, car d'éventuels facteurs de la forme $(Z-2)$, par exemple, se prêteraient mal aux manipulations trigonométriques qui ont servi ici à conclure...*

3 *Ce serait une grave erreur de négliger le cas $z = 1$: outre que l'écriture de Z sous forme de quotient ferait alors apparaître une division par zéro, le but de la suite de ce genre d'exercice est souvent de s'intéresser à une étude de limite de S quand x tend vers 0, par exemple; la valeur de $S(0)$ est alors un bon moyen de contrôle...*

4 *Si on connaîssait la formule finale (comme dans la remarque* **1**), *il serait envisageable de la démontrer par récurrence; l'expérience montre, malheureusement, que les calculs effectués par ce moyen sont souvent aussi pénibles... En revanche, on peut alors l'utiliser pour chercher à manipuler une expression telle qu'ici $S.\sin x/2$, en transformant les produits en différences (on sait que $\sin a\cos b = (\sin(a+b) - \sin(b-a))/2$), qui vont alors s'annuler 2 à 2; l'exercice (classique, et souvent posé à l'oral) est laissé au lecteur ...*

Inégalités et études de fonctions

Énoncé.

Montrer que pour tout $x > 0$, on a l'encadrement $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ (on étudiera les variations des fonctions $f : x \mapsto f(x) = x - \sin x$ et $g : x \mapsto g(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$).

Méthode.

1 *L'indication donnée ici est le plus souvent sous-entendue : c'est en effet* **la** *méthode qui s'impose pour les inégalités (à une seule variable) qui ne relèvent pas de techniques algébriques, telle que la factorisation *.*

2 *Respectant l'énoncé, on se contentera donc d'étudier les variations de f et g, et donc de déterminer le signe des dérivées f' et g', sur l'intervalle pertinent : ici, $[0, +\infty]$; la conclusion résulte alors de ce que $f(0) = g(0) = 0$ (dans des cas plus délicats, il faudrait aussi étudier les limites de f et g).*

3 *Mais si l'étude de f' est immédiate, celle de g' nécessite de résoudre un nouveau problème analogue; il ne faudra donc pas hésiter à étudier g'', et pourquoi pas g''', etc. (évidemment, la méthode ne «fonctionne» que si ces dérivées successives sont de plus en plus simples!)*

Solution.

Étudions d'abord les variations, sur $\mathbf{R}^+$, de la fonction f : on a f dérivable, et pour tout x, $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. De plus, sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, f' ne s'annule qu'en 0; f est donc strictement croissante sur cet intervalle, puis croissante (au sens large); ce que résume le tableau ci-dessous :

x	$0 \quad 2\pi$	$\dots \quad +\infty$
signe de $f'(x)$	$0 + 0$	$+$
variations de f	$0 \nearrow$	$\nearrow$

Il est clair, d'après ce tableau, que $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$; c'est d'ailleurs une conséquence immédiate de la définition d'une fonction croissante, car si $0 < x < 2\pi$, $0 = f(0) < f(x) < f(2\pi) = 2\pi$; et si $x \geq 2\pi$, $f(x) \geq f(2\pi) = 2\pi > 0$. On a donc $x > 0 \Rightarrow x - \sin x > 0$, c'est-à-dire $x > \sin x$.

* *On verra cependant au chapitre 11 que certaines inégalités très courantes de cette forme peuvent se ramener à la formule de Taylor, et qu'il est parfois aussi possible d'utiliser les «inégalités de convexité».*

À présent, étudions les variations, sur $\mathbf{R}^+$, de la fonction g : on remarque d'abord que $g'(x) = 1 - x^2/2 - \cos x$, puis que $g''(x) = -x + \sin x = -f(x)$. Comme on vient de déterminer le signe de f, on peut donc établir le tableau suivant :

x	$0 \quad +\infty$
signe de $g''(x)$	$0 \quad -$
variations de g'	$0 \searrow$

puisque $g'(0) = 1 - 0 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$,

donc g' est négatif sur $]0, +\infty[$, et on peut continuer le tableau ainsi:

signe de $g'(x)$	$0 \quad -$
variations de g	$0 \searrow$

ce qui montre (comme précédemment pour f) que $g(x) < 0$ si $x > 0$, d'où $x - x^3/6 < \sin x$, et l'encadrement demandé.

Remarques

1 *Les tableaux de variations de g' et g (et même celui de f) sont en fait inutiles, puisque seul le sens de variation de ces fonctions importe pour conclure. Mais leur emploi n'est pas gravement critiquable, car ils apportent une information visuelle immédiate (à ce sens, un tracé de f et g ou des trois fonctions de l'inégalité pourrait également être utile; il est même souvent demandé par la formule sibylline :* «Donner l'interprétation graphique de cet encadrement…»*)*

2 *Par contre, il serait incorrect de ne pas justifier (au moins une fois) le passage du tableau à l'inégalité cherché; on pourra même éventuellement rappeler la définition exacte d'une fonction croissante, par exemple (voir le chapitre 7).*

3 *Ce genre d'étude bute parfois sur l'impossibilité de déterminer complètement l'un des signes cherchés; ainsi, par exemple, on aurait pu trouver g' décroissante de 1 à $-\infty$. Dans ce cas, il ne reste plus qu'à utiliser le «théorème des valeurs intermédiaires» (chapitre 8) pour découper l'intervalle en deux (où g' resterait de signe constant); le plus souvent, il faut craindre alors une erreur de calcul ou d'énoncé, et un recours à la calculatrice graphique s'impose pour ne pas s'embarquer inutilement dans des calculs inextricables…*

4 *L'étudiant diligent se demandera peut-être si on ne pourrait pas généraliser cet exercice à des fonctions h, k, etc. bien choisies, obtenant des inégalités de plus en plus précises; dans le calcul des primitives correspondantes, il faudra penser à «ajuster» la constante d'intégration pour pouvoir utiliser $h(0) = 0$ (on aboutit, par exemple, à $1 - x^2/2 < \cos x < 1 - x^2/2 + x^4/24$)*

Exercices types : Fiche n° 7

Construction et démonstration de «formules» mettant en jeu des fonctions circulaires réciproques

Énoncé.

Montrer que pour tout t non nul, $\operatorname{Arc\,tg} t + \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}.\operatorname{signe}(t)$

a) à l'aide d'une étude de fonction,

b) directement, en utilisant la relation entre $\tan\alpha$ et $\tan(\pi/2-\alpha)$.

Méthode.

1 *S'il est possible de dériver l'identité cherchée, on voit qu'il suffit de montrer que l'on a $f'(x)=0$, ce qui est en général plus facile que de montrer que $f(x)=\mathrm{C^{te}}$, puisque les dérivées des fonctions circulaires réciproques sont des fonctions algébriques.*

2 *Plus directement (mais si cette méthode n'est pas, comme ici, imposée par l'énoncé, la précédente est généralement à préférer, car plus simple), si on veut démontrer une identité donnée, ou simplifier une expression contenant des fonctions réciproques, on doit :*

1) transformer l'expression par les fonctions directes et utiliser les formules trigonométriques appropriées;

2) vérifier que l'égalité des résultats (des images) entraîne bien celle des antécédents, en d'autres termes que les fonctions utilisées sont bien injectives dans les intervalles considérés;

3) si ce n'est pas le cas, éliminer les autres antécédents possibles par des analyses de signe, d'encadrement, etc...

3 *Mais il est même possible de «deviner» comment la formule demandée a été obtenue : schématiquement, l'idée est de partir d'une formule «directe» (par exemple, ici, $\tan(\pi/2-\alpha)=1/\tan\alpha$), de poser $\tan\alpha = A \iff \operatorname{Arc\,tg} A=\alpha$, ce qui amène (à peu près...) à $\pi/2-\operatorname{Arc\,tg} A=\operatorname{Arc\,tg}(1/A)$, et de conclure par une analyse soignée du type de* **2**.

Solution.

a) Étudions la fonction $f : t \mapsto \operatorname{Arc\,tg} t + \operatorname{Arc\,tg}(1/t)$. Elle est définie sur $\mathbf{R}-\{0\}$, et est impaire (puisque Arc tg l'est); il suffit donc d'étudier f sur $]0,+\infty[$. f est dérivable sur cet intervalle, et puisque $(\operatorname{Arc\,tg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$, on a

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{-1/t^2}{1+(1/t)^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{-1}{t^2+1} = 0.$$

f est donc constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$, ce qui signifie que pour tout $t>0$, on a $f(t)=f(1)=\operatorname{Arc\,tg} 1+\operatorname{Arc\,tg} 1 = 2\times(\pi/4)=\pi/2$. f étant impaire, on a donc $t < 0 \Rightarrow f(t) = -f(-t) = -f(1) = -\pi/2$, et en définitive $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} t + \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}.\operatorname{signe}(t)$.

b) Soit $\alpha \in]-\pi/2, 0[\cap]0, \pi/2[$, on a $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos(\pi/2-\alpha)}{\sin(\pi/2-\alpha)} = \frac{1}{\tan(\pi/2-\alpha)}$. Prenons alors $t > 0$, et posons $\alpha = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} t$; par définition de Arc tg, on a $\alpha \in]0, \pi/2[$ et $t = \tan\alpha = \frac{1}{\tan(\pi/2-\alpha)}$; de plus, posant $\beta = \pi/2 - \alpha$, et $t' = \tan\beta$, on a donc $t' = 1/t$, et $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} t' = \beta$ puisque $0 < \beta < \pi/2$, et que la fonction Arc tg est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]0, \pi/2[$. En résumé, on a donc $\alpha+\beta = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} t + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} t' = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} t + \operatorname{Arc}\operatorname{tg}(1/t) = \pi/2$. Si $t < 0$, on a à présent $\alpha \in]-\pi/2, 0[$, et donc $\beta \in]\pi/2, \pi[$; le même calcul donne $\beta_1 = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} t' = \beta - \pi$, en effet, $\beta_1 \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan\beta_1 = \tan\beta$, et deux angles ayant même tangente sont séparés de $k\pi$; on en déduit que $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} t + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} t' = \alpha + \beta - \pi = \pi/2 - \pi = -\pi/2$.

Remarques

1 *$f'(t) = 0$ n'entraîne pas que f est constante : cela n'est vrai que sur chaque intervalle où f est dérivable! Ici, par exemple, la traversée de la valeur interdite 0 fait «sauter» f de $-\pi/2$ à $\pi/2$... (on verra au chapitre 8 que cela vient de ce que f ne peut être prolongée en 0 par continuité)*

2 *On aurait bien entendu pu réutiliser l'argument de parité dans la partie b), et c'est même la rédaction recommandée; mais la technique qui a été utilisée est beaucoup plus générale, et s'impose dans le cas (fréquent) où, comme on l'a mentionné plus haut, la fonction utilisée (ici,* tan*) n'est pas injective.*

3 *Lorsqu'on adopte une démarche «informelle», c'est-à-dire qu'on commence par effectuer sans précaution les calculs, on obtient souvent des formules correctes dans certains intervalles. Pour pouvoir transformer cette esquisse en une démonstration correcte (sur ces intervalles!), il est clair qu'il faut*

1) que les domaines d'existence soient respectés

2) que les «simplifications» tels que $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(\tan(X)) = X$ soient «légales», c'est-à-dire que X appartienne au domaine sur lequel tan *est une bijection.*

La condition 2 est en un certain sens «conventionnelle», c'est-à-dire par exemple qu'ici X doit appartenir à $]-\pi/2, \pi/2[$, intervalle qui a été défini «arbitrairement» dans le cours (ce serait par conséquent $[-\pi/2, \pi/2]$ pour Asin*, et $[0, \pi]$ pour* Acos*...)*

Exercices types : Fiche n° 8

Manipulations de sommations

Énoncé.

On veut déterminer une formule explicite pour $S = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Calculer (par décalage) $(x^2-2x+1)S$; en déduire la valeur de S. Que se passe-t-il dans le cas $x = 1$? Montrer qu'on pouvait obtenir (plus simplement !) ce résultat en considérant S comme un polynôme et en en cherchant une primitive.

Méthode.

1 *L'idée générale (et c'est ce que doit faire apparaitre un calcul préliminaire au brouillon, en négligeant d'abord les «détails» tels que les termes «aux bornes», etc.) est que les termes de $(x^2 - 2x + 1)S$ s'éliminent (presque) tous, puisque*

$$\begin{aligned}(1-2x+x^2)(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots) &= 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots\\ &\quad -2x-4x^2-6x^3-8x^4+\dots\\ &\quad +\ x^2+2x^3+3x^4+\dots\\ &= 1+\ 0+\ 0+0+\dots(+?)\end{aligned}$$

2 *On va donc faire apparaître les trois sommes du développement, et, par décalage, mettre en évidence la «simplification», en d'autres termes, l'apparition de termes nuls, car de la forme $(k-1)x^k - 2kx^k + (k+1)x^k$; il ne subsistera donc que les termes «aux bornes».*

3 *Et il ne restera plus qu'à diviser par $x^2 - 2x + 1$, en pensant à traiter $x = 1$ à part !*

4 *L'énoncé attire l'attention sur l'écriture de S comme une dérivée de polynôme; on verra en Spé que c'est une des techniques de base, et qu'il faudrait y penser aussi pour calculer, par exemple, $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k$, en prenant l'initiative d'écrire $S_2 = xS_1 = x(S_0)'$, avec $S_0 = \sum_{k=1}^{n} kx^k = xS$.*

Solution.

On a $(x^2-2x+1)S = \sum_{k=1}^{n} k(x^{k+1}-2x^k+x^{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k+1} - 2\sum_{k=1}^{n} kx^k + \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, qu'on notera $S_1+S_2+S_3$. Décalons S_1 ; en posant $K = k+1$, on a $S_1 = \sum_{k=1}^{n} kx^{k+1} = \sum_{K=2}^{n+1}(K-1)x^K = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)x^k$; de même, décalons S_3 en posant $K = k-1$, on a $S_3 = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{K=0}^{n-1}(K+1)x^K = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k$. Ne conservant dans ces trois sommes que les termes «communs», on écrira donc :

$S_1 = \left(\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)x^k\right) + (n-1)x^n + nx^{n+1}$, $S_2 = -2x - \left(\sum_{k=2}^{n-1} 2kx^k\right) - 2nx^n$ et $S_3 = 1+2x+\left(\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)x^k\right)$; en additionnant, on obtient $(x^2-2x+1)S = 1+2x-2x+(n-1)x^n-2nx^n+nx^{n+1}+\left(\sum_{k=2}^{n-1}((k-1)-2k+(k+1))x^k\right)$. Or les termes de cette dernière somme sont tous nuls, puisque $(k-1)-2k+(k+1) = 0$; divisant par $(x-1)^2$ pour $x \neq 1$, on en déduit que $S = (nx^{n+1}-(n+1)x^n+1)/(x-1)^2$. Quand $x = 1$, S est simplement égal à $\sum_{k=1}^{n} k$ que l'on sait valoir $n(n+1)/2$. Ainsi, on obtient en définitive

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

On peut remarquer que S est la dérivée (terme à terme) du polynôme $\sum_{k=0}^{n} x^k$ (car le premier terme de cette somme vaut 1, de dérivée nulle) qu'on sait être égal (pour $x \neq 1$) à la fraction rationnelle $(x^{n+1}-1)/(x-1)$; dérivant cette dernière, on retrouve la formule obtenue plus haut. Toutefois, cette méthode ne permet pas d'obtenir la valeur correspondant à $x = 1$...

Remarques.

1 *Dans le cas $x = 1$, il serait impossible de conclure par cette méthode (puisqu'on a simplement montré que 0=0 !); il est en fait difficile de ne pas traiter ce cas à part; on pourrait tout au plus remarquer que, S étant continue, on doit avoir $S(1) = \lim_{x\to 1} S(x)$, mais comme cette limite est difficile à calculer...*

2 *Les décalages doivent être soigneusement rédigés; on peut par contre glisser rapidement sur l'utilisation des formules de «regroupement des termes», telles que $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$.*

3 *De même, la séparation des premiers (et derniers) termes de S_1, S_2 et S_3 devrait, dans des cas plus délicats, être rédigée ainsi :*

«On sait que, si $I \cup J = T$, et si $I \cap J = \emptyset$, on a $S = \sum_{k\in T} a_k = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in J} a_k$; prenant ici $I = \ldots$» *; c'est en particulier la rédaction standard des séparations de sommes en termes d'indices pairs et impairs.*

Exercices types : Fiche n° 9

Sommations et formule du binôme

Énoncé

Montrer par récurrence que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ (on pourra utiliser la relation entre les $\binom{n}{k}$ correspondant à la construction du triangle de Pascal). Montrer qu'on pouvait obtenir directement cette formule en utilisant la dérivée du polynôme $(1+x)^n$.

Méthode

1 *Le passage d'une somme à la suivante n'étant pas direct (au sens où il ne s'agit pas d'ajouter un nouveau terme), il faut d'abord obtenir une relation entre les* $\binom{n}{k}$ *et les* $\binom{n+1}{k}$ *; on sait que* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *(avec la convention* $\binom{n}{p} = 0$ *si* $n < p$*); mais ce résultat n'étant pas clairement au programme, il convient de savoir le redémontrer (à l'aide des factorielles); la solution proposée contient donc une démonstration de ce type.*

2 *La récurrence une fois mise en place (à l'aide des techniques de décalage vues dans la fiche n° 8), on aboutit à une relation de la forme* $S_{n+1} = 2S_n + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ *; il convient donc de savoir calculer ce genre de somme, en remarquant qu'elle correspond au développement (par la formule du binôme) de* $(1+1)^n$.

3 *Enfin, l'idée de dériver* $(1+x)^n$ *aboutit naturellement à* S_n *(en prenant* $x = 1$*); les remarques finales contiennent d'autres exemples du même type.*

Solution

Montrons d'abord le lemme suivant : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (avec la convention $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$). Ce résultat est trivialement vrai si $k > n$, et il est vrai également si $k = n$ puisque $\binom{n}{n} = 1$. Si $k < n$, on sait que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, et donc $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$; comme $(k+1)! = (k+1)k!$, on a comme dénominateur commun $(k+1)!(n-k)!$ et $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(k+1+n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$. Ainsi, on a donc (pour tout $k > 0$) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

On a donc $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}(k\binom{n}{k-1} + k\binom{n}{k})$ (le premier terme étant nul), et donc $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n}{k-1} + S_n$ (puisque, avec la convention faite, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n}{k}$); par décalage (posant $K = k-1$), on obtient $S_{n+1} = \sum_{K=0}^{n}(K+1)\binom{n}{K} + S_n = \sum_{K=0}^{n} K\binom{n}{K} + \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K} + S_n = 2S_n + \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}$ (car $\sum_{K=0}^{n} K\binom{n}{K} = S_n$, K étant une variable muette). Or cette dernière somme, étant le développement par la formule du binôme de $(1+1)^n$ (car $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k$), on obtient en définitive la relation de récurrence $S_{n+1} = 2S_n + 2^n$.

Montrons alors par récurrence que $S_n = n2^{n-1}$: cette formule est (trivialement) vraie pour $n = 0$; supposons qu'elle le soit pour un k fixé, et donc que $S_k = k2^{k-1}$, on aura donc $S_{k+1} = k2^k + 2^k = (k+1)2^k$, ce qui montre que la propriété est héréditaire; par récurrence, elle est donc toujours vraie.

Remarquons enfin que $f : x \mapsto (1+x)^n$ a pour dérivée $f' : x \mapsto n(1+x)^{n-1}$; et en développant, que $f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$; la dérivée d'une somme étant la somme des dérivées (on dit que la dérivation est linéaire), on aura $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$ et donc, pour tout x, $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$; prenant $x = 1$, on en déduit à nouveau que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$.

Remarques

1 *Le même schéma aboutit à la démonstration par récurrence de la formule du binôme elle-même : le passage de la forme $(x+y)^n$ à $(x+y)^{n+1}$ demande (outre une multiplication par $(x+y)$) l'utilisation de la relation $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (et des décalages convenables). On verra (au chapitre 10) que ce schéma intervient également dans la démonstration de la formule de Leibniz.*

2 *On a vu dans la fiche n° 8 que l'interprétation d'une somme comme la dérivée (par exemple) d'une autre somme plus connue est un «truc» standard; on pourra, sur le même modèle, essayer par exemple de calculer $\sum_{k=1}^{n} k\cos kx$.*

3 *L'utilisation de la «complication» supplémentaire apparente obtenue par l'introduction de x dans S_n, ce qui, en définitive, revient à remplacer S_n par $S_n(1)$, avec $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$, est en revanche une technique relevant (au niveau des classes préparatoires) de l'astuce quasi-introuvable sans indications supplémentaires données par l'énoncé; c'est cependant une méthode extrêmement fructueuse, et dont d'autres échantillons seront vus en Spé : on est ainsi quelquefois amené, pour étudier une suite de nombres u_n, à considérer la «série» $S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ (le* *sens de* $\sum^{\infty}$ *sera détaillé à ce moment...); $S_n(x)$ s'appelle la série génératrice de u_n, et son étude permet parfois d'obtenir des résultats sur les u_n, inaccessibles autrement.*

4 *Par contre, un énoncé de ce type continue souvent par une généralisation du résultat précédent, de la forme* «à l'aide d'une méthode analogue, déterminer $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$», *par exemple, et il faut pouvoir alors imaginer la mise en œuvre de la même technique (ou d'une autre similaire); ici, cela amènerait à montrer que $f''(1) = S_n + T_n$, d'où $T_n = n(n+1)2^{n-2}$.*

Exercices types : Fiche n° 10

Conjecture et preuve par récurrence

Énoncé.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et (pour tout $n \geq 1$) $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Déterminer u_n en fonction de n.

Méthode.

1 *On cherche donc une «formule explicite»; si, comme c'est le cas ici, la suite étudiée ne se ramène pas à l'un des modèles du cours (on en verra d'autres au chapitre 12), un travail expérimental s'impose, pour voir s'il n'est pas possible de conjecturer la réponse...*

2 *On constate en effet que $u_2 = 1$, $u_3 = u_1 + u_2 = 2$, $u_4 = u_1 + u_2 + u_3 = 4$ ... Bien qu'une certaine prudence s'impose (comme on le verra en classe à propos de la suite $(1, 2, 4, 8, 16, 31(!), \ldots)$), on peut donc conjecturer que $u_k = 2^{k+a}$, avec $u_4 = 2^{4+a} = 2^2 \Rightarrow a = -2$.*

3 *Ce type de formule se démontre par récurrence; mais il serait présomptueux de parler ici de récurrence «immédiate», même si vous avez déjà montré (dans les questions précédentes d'un problème, par exemple) que vous maîtrisez ce genre de démonstration...*

4 *Il faut donc poser soigneusement l'hypothèse de récurrence (ici, et étant donnée la définition de u, on aura sans doute intérêt à supposer la formule vraie pour tous les j jusqu'à k); puis retrouver le modèle général de démonstration (dans le cours) et le calquer sans chercher d'effets de style (qu'on réserverait à des démonstrations analogues, si l'exercice continuait).*

Solution.

L'observation des premières valeurs de la suite ($u_2 = u_1 = 1$, $u_3 = u_1 + u_2 = 2$, $u_4 = u_1+u_2+u_3 = 4, \ldots$) permet de conjecturer que, pour $n \geq 2$, on a $u_n = 2^{n-2}$. Démontrons cette «formule» par récurrence (étendue) : prenons comme propriété à démontrer la propriété $\mathcal{P}(n)$: ($u_2 = 1$ et $u_3 = 2$ et $\cdots$ et $u_n = 2^{n-2}$). $\mathcal{P}(2)$ est évidemment vraie; supposons (hypothèse de récurrence) que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour un certain $k \geq 2$; on aura alors (par définition) $u_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} u_j = 1 + \sum_{j=2}^{k} u_j$, égal, d'après l'hypothèse de récurrence, à $1 + \sum_{j=2}^{k} 2^{j-2}$. Par décalage, on a (en posant $J = j-2$) $\sum_{j=2}^{k} 2^{j-2} = \sum_{J=0}^{k-2} 2^J$, et, d'après la formule des suites géométriques, $\sum_{J=0}^{k-2} 2^J = \dfrac{2^{k-2+1}-1}{2-1} = 2^{k-1} - 1$. On aura donc $u_{k+1} = 2^{k-1} - 1 + 1 = 2^{k-1} = 2^{(k+1)-2}$, ce qui, combiné avec les valeurs de u_j déja connues pour $j \leq k$, est la propriété $\mathcal{P}(k+1)$. Par récurrence (à partir de $n_0 = 2$), $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 2$, et $u_n = 2^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

Remarques.

1 *Il est heureux que les valeurs de u_n aient permis une conjecture simple. Quand cela ne se produit pas, il ne reste plus qu'à manipuler la suite, dans l'espoir qu'apparaisse une suite plus simple. Ainsi, la suite $(2, 4, 16, 256, 65566, 2^{32}, \ldots)$ se transforme en une suite géométrique en posant $v_n = \ln u_n$; la suite $(0, 1, 5, 12, 22, 35 \ldots)$ se transforme en $(1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$ en posant $v_n = u_{n+1} - u_n$ (c'est la «méthode des différences finies»), or la suite v_n est arithmétique, etc.*

2 *On sait que c'est parce qu'il existe une relation (simple) entre les valeurs successives de la suite qu'une démonstration par récurrence peut être envisagée; inversement, il ne semble pas possible d'obtenir une démonstration «directe» dans un cas de ce genre (toutefois, on peut remarquer que la relation donnée définit une suite unique; si on pouvait montrer que la suite donnée par la formule avait la propriété en question, cela montrerait que les deux suites coïncident; cette technique sera exploitée au chapitre 19, pour l'étude des polynômes (de Bernouilli) vérifiant la relation $P(x + 1) - P(x) = x^k$).*

3 *Il semble inutile, lorsqu'on débute, de connaître plusieurs types de rédaction de ces démonstrations; quitte à allonger un peu, il vaut mieux se ramener systématiquement au modèle «canonique» donné dans le cours (et où on a sans doute remarqué le soin pris à distinguer le «n» de la proposition générale (à démontrer) du «k» utilisé dans l'hypothèse de récurrence proprement dite; à vrai dire, la confusion serait cependant sans grand danger). On pourra toutefois utiliser avec profit (tout particulièrement dans des exercices d'oral) la forme :*

1) Montrer $\mathcal{P}(0)$.

2) Montrer que (pour $n \geq 1$) $\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$

qui permet de déterminer la «cible» (la propriété à démontrer $\mathcal{P}(n)$) sans devoir l'écrire à l'avance, ce qui, surtout à l'oral, serait généralement considéré comme une rédaction maladroite, pouvant même passer pour un cercle vicieux.

4 *Cependant, bien qu'on puisse théoriquement ramener toute démonstration par récurence à ce modèle de base, en modifiant convenablement l'hypothèse de récurrence, il est d'usage d'utiliser dans certains cas des rédactions différentes (récurrence partielle, récurrence étendue, etc). Ces autres formes de récurrence fréquentes seront rappelées et analysées, avec quelques exemples, à la fin de la fiche n° 17.*

Exercices types : Fiche n° 11

Mathématiques «expérimentales» : étude d'une suite de polynômes (†)

Énoncé.

On définit une suite (P_n) de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ par $P_0 = 0$ et (pour tout $n \geq 0$) $P_{n+1} = P_n^2 + X$. Montrer qu'en écrivant $P_n = \sum_{k=0}^{d} a_k(n)X^k$, où $d = \deg(P_n)$ (on déterminera ce degré), les coefficients $a_k(n)$ ne dépendent pas de n si $k \leq n$.

Méthode.

1 *Il est pratiquement impossible d'aborder ce type d'exercice sans avoir une vision «concrète» de l'énoncé; il va donc falloir calculer quelques exemples. Il est alors clair que l'utilisation d'un logiciel adapté (ici, par exemple,* `DERIVE` *ou* Maple V*) va permettre de pousser l'expérimentation beaucoup plus loin, faisant (peut-être) apparaître des régularités qu'on pourra ensuite tenter de démontrer par récurrence. On trouve ici (en développant, comme l'y invite l'énoncé, les polynômes en puissances croissantes de X) :*

$$\begin{aligned}
P_1 &= X\\
P_2 &= X + X^2\\
P_3 &= X + X^2 + 2X^3 + X^4\\
P_4 &= X + X^2 + 2X^3 + 5X^4 + 6X^5 + 6X^6 + 4X^7 + X^8\\
P_5 &= X + X^2 + 2X^3 + 5X^4 + 14X^5 + 26X^6 + 44X^7 + 69X^8 + 94X^9\\
&\qquad + 114X^{10} + 116X^{11} + 94X^{12} + 60X^{13} + 28X^{14} + 8X^{15} + X^{16}
\end{aligned}$$

Il semble clair que $\deg(P_n)$ est une puissance de 2, et que l'écriture complète des polynômes suivants deviendra rapidement absurde.

2 *Mais le «décryptage» de l'énoncé ne s'arrête pas là : il faut à présent interpréter l'invariance des $a_k(n)$. On remarque, dans les calculs précédents, que les coefficients ne changent plus à partir d'une certaine ligne; ainsi, les coefficients de X^3 sont successivement $(0, 0, 2, 2, 2, \ldots)$, ceux de X^4 sont $(0, 0, 0, 1, 5, 5, \ldots)$, etc. Comme dire qu'une suite est constante (à partir d'un certain rang), c'est dire que (pour $n \geq n_0$) l'on a $u_{n+1} = u_n$, on voit qu'il va falloir démontrer que (pour $k \leq n$) $a_k(n) = a_k(n+1)$; ou encore que les coefficients de X^k dans $P_{n+1} - P_n$ sont nuls si $k < n$. Or cela revient à dire que $Q_n = P_{n+1} - P_n$ «commence par» aX^n, et est équivalent à la divisibilité de Q_n par X^n; cette remarque peut donner l'idée d'une démonstration par récurrence...*

Solution.

On sait que $\deg(P^2) = 2\deg(P)$; si $\deg(P) \geq 1$, on aura $\deg(P^2) > 1$, et $\deg(P^2 + X) = \deg(P^2) = 2\deg(P)$. Ainsi, la suite $d_n = \deg(P_n)$ vérifie (si $n \geq 1$) $d_{n+1} = 2d_n$; c'est donc une suite géométrique (de raison 2), et $d_n = 2^{n-1}d_1 = 2^{n-1}$.

Pour étudier les coefficients de P_n, remarquons d'abord que tous les P_k sont de la forme XA_k (où $A_k \in \mathbf{R}[X]$) : en effet, si 0 est racine de P_k (ce qui équivaut à «P_k divisible par X»), on a $P_{k+1}(0) = P_k^2(0) + 0 = 0$. Montrons alors par récurrence que $P_{n+1} - P_n$ est divisible par X^{n+1}. Cette propriété est (évidemment) vraie pour $n = 0$, puisque $P_1 = X$; supposons qu'elle soit vraie pour k; on aura alors $P_{k+1} - P_k = X^{k+1}Q_k$, donc $P_{k+2} - P_{k+1} = (P_{k+1}^2 + X) - (P_k^2 + X) = P_{k+1}^2 - P_k^2 = (P_{k+1} + P_k)(P_{k+1} - P_k) = X(A_{k+1} - A_k)X^{k+1}Q_k = X^{k+2}(A_{k+1} - A_k)Q_k$, ce qui est la propriété cherchée pour $k+1$ (avec $Q_{k+1} = Q_k(A_{k+1} - A_k)$). Or, dire que le polynôme R est divisible par X^p veut dire que $R = X^p \sum_{k=0}^{n} b_k X^k = \sum_{k=0}^{n} b_k X^{k+p}$, et par décalage (en posant $K = k + p$), que $R = \sum_{k=p}^{n+p} c_k X^k$, ou encore que le coefficient de X^k dans R est nul si $k < p$. Appliquant ce résultat au polynôme $P_{n+1} - P_n = \sum_{k=0}^{\deg(P_{n+1})} (a_k(n+1) - a_k(n))X^k$, on en déduit que pour $k < n+1$, on a $a_k(n+1) - a_k(n) = 0$. Ceci montre que la suite $(a_k(n))_{n \in \mathbf{N}}$ (avec k fixé) est constante à partir du rang k.

Remarques.

1 *Les énoncés de ce genre sont souvent «ambigus» : c'est une raison supplémentaire de ne chercher à les résoudre qu'après un travail expérimental, permettant de déterminer le sens le plus probable à leur donner; ici, un énoncé «parfaitement» rigoureux aurait pu être : «*les coefficients $a_k(n)$ vérifient $k \leq n_1 \leq n_2 \Rightarrow a_k(n_1) = a_k(n_2)$».

2 *On aurait pu penser aussi à calculer «exactement» les a_n ; là encore, le travail expérimental initial est utile, mais dissuasif, les coefficients trouvés ne rappelant rien de précis; de toute façon, on n'aurait pu aboutir qu'à une relation de récurrence, de la forme (pour $k > 1$)*

$$a_k(n+1) = a_k(0)a_k(n) + a_k(1)a_k(n-1) + a_k(2)a_k(n-2) + \cdots + a_k(n)a_k(0)\ldots$$

3 *Cette suite de polynômes a acquis à partir de 1985 une importance pratique considérable; elle est en effet liée à un ensemble «fractal», l'ensemble de Mandelbrot, d'un grand intérêt théorique, et dont le graphisme extrêmement complexe (et esthétique) a fait le tour des écrans d'ordinateurs du monde entier.*

4 *On peut d'ailleurs se poser bien d'autres questions sur cette suite... Ainsi, les racines de ces polynômes sont encadrées dans l'exercice 28 du chapitre 6; les techniques du chapitre 12 montreront la convergence de la suite $(P_n(x))$ pour x fixé (si x appartient à l'intervalle $]-1/2, 1/4]$); il serait aussi possible de calculer exactement les $a_k(n)$ (pour $k \leq n$), soit en utilisant la formule de calcul de P^2, et une récurrence, soit, de façon bien plus surprenante, en appliquant la formule de Taylor à la fonction $x \mapsto (1 - \sqrt{1-4x})/2$; ce fut l'objet d'un problème de concours...*

Exercices types : Fiche n° 12

Construction d'une bijection : paramétrage du cercle unité

Énoncé.

Soit f l'application $f : t \mapsto f(t) = M_t$, de $\mathbf{R}$ dans le plan (muni d'un repère orthonormal), où les coordonnées de M_t sont données par les formules

$$M_t = \begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}.$$

Montrer que f est injective, et déterminer un sous-ensemble $\mathcal{B}$ du plan tel que $f\Big|^{\mathcal{B}}$ soit une bijection. Soit $M \in \mathcal{B}$ tel que $(\widehat{Ox, OM}) = \alpha$; calculer $f^{-1}(M)$ en fonction de α.

Méthode.

1 *Seule une connaissance précise des définitions du chapitre 6 permet d'aborder ce genre d'exercice; en effet, les théorèmes généraux évitant le calcul de f^{-1}, par exemple, ne s'appliquent qu'aux fonctions numériques* **continues** *(chapitre 8), et aux applications linéaires (en dimension finie) (chapitre 18). Dans tous les autres cas, il est nécessaire de revenir aux définitions...*

2 *Quand on aura montré que f est injective, $\mathcal{B}$ sera l'ensemble des points du plan ayant un antécédent par f, autrement dit (par définition) $\mathcal{B} = \operatorname{Im} f$. Dans le langage du chapitre 23 (déjà présenté partiellement au chapitre 15), il s'agit de la trajectoire correspondant à la courbe paramétrée $t \mapsto M_t$. «Éliminer» t entre $x(t)$ et $y(t)$ donnera une équation (cartésienne) de cet ensemble (on trouve ici $x^2(t)+y^2(t) = 1$, ce qui pouvait se deviner par un tracé des images M_t à la calculatrice), mais la réciproque (c'est-à-dire la question de savoir si $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow M = (x, y) \in \mathcal{B}$) n'est nullement automatique, et il faut, pour y répondre, résoudre l' «équation» $f(t) = (x, y)$, où t est inconnue et x, y sont des paramètres (vérifiant $x^2 + y^2 = 1$). En général, seule une étude sérieuse de cette équation donnera la réponse; ici, il serait temps de remarquer que les «formules» pour f rappellent vaguement quelque chose...*

Solution.

f est (évidemment) définie sur tout $\mathbf{R}$. Montrons que f est injective : supposons que $f(t_1) = f(t_2)$, c'est-à-dire que $x(t_1) = x(t_2)$ et que $y(t_1) = y(t_2)$. Cela équivaut à $(*)$ $(1-t_1^2)(1+t_2^2) = (1-t_2^2)(1+t_1^2)$ et $(**)$ $2t_1(1+t_2^2) = 2t_2(1+t_1^2)$, or $(**) \iff 2(t_1 - t_2) = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2)$ et $(*) \iff t_1^2 = t_2^2$. Supposons alors que $t_1 \neq t_2$; on aura donc, d'après $(*)$, $t_1 + t_2 = 0$, ce qui est absurde d'après $(**)$. On a donc démontré que $f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$, ce qui, par définition, signifie que f est une injection.

Pour déterminer l'ensemble $\mathcal{B}$, remarquons d'abord que pour tout point M_t, on a

$$x_t^2 + y_t^2 = \frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = 1,$$

c'est-à-dire que M appartient au cercle-unité $\mathcal{C}$, d'équation cartésienne $X^2+Y^2=1$. Réciproquement, soit $M(X,Y)$ appartenant à ce cercle (on aura donc $Y^2 = 1-X^2$); supposons que $X \neq -1$ et posons $t = Y/(X+1)$. Montrons que $X = x(t)$ et que $Y = y(t)$. On a en effet

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{(X+1)^2 - Y^2}{(X+1)^2+Y^2} = \frac{2X+2X^2}{2+2X} = X$$

et

$$y(t) = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2Y(X+1)}{(X+1)^2+Y^2} = \frac{2Y(X+1)}{2+2X} = Y.$$

Tout point de $\mathcal{C}$ tel que $X \neq -1$ possède donc un antécédent par f (unique, puisque f est injective); d'autre part, le point $A(-1,0)$, seul point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -1, ne saurait avoir d'antécédent par f, car $x(t) = -1 \iff 1-t^2 = -1-t^2$, ce qui est impossible. Ainsi, la restriction $f\big|^{\mathcal{B}}$ de f à l'ensemble d'arrivée $\mathcal{B} = \mathcal{C} - \{A\}$ est une bijection.

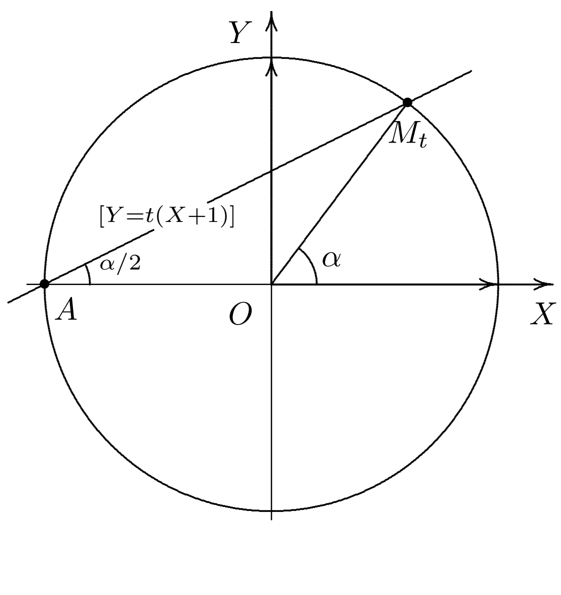
Soit alors M un point de $\mathcal{B}$ tel que $(\widehat{Ox, OM}) = \alpha$; on sait que $M = (\cos\alpha; \sin\alpha)$, avec $\alpha \in]-\pi,\pi[$, puisque $M \neq A$; on doit donc déterminer t tel que $\cos\alpha = (1-t^2)/(1+t^2)$ et $\sin\alpha = 2t/(1+t^2)$ (on vient de montrer qu'un tel t existe et est unique). Or les «formules en t» montrent que $t = \tan(\alpha/2)$ convient; on a donc $f^{-1}(M) = \tan(\alpha/2)$.

Remarques.

1 *Il est rare de pouvoir, comme ici, résoudre explicitement toutes les équations qui interviennent; on devra souvent utiliser des «théorèmes d'existence» (tel le «théorème des valeurs intermédiaires») pour pouvoir justifier la surjectivité de f.*

2 *Le système des équations $(*)$ et $(**)$ (qui admet évidemment la solution triviale $t_1 = t_2$) correspond en général à la recherche des points de la courbe admettant plusieurs antécédents, qu'on appelle les points doubles de la courbe. On voit qu'en général, et même une fois $(t_2 - t_1)$ factorisé, cette recherche ne sera pas facile, les équations, même algébriques, devenant rapidement de degré élevé.*

3 *L'idée la moins «naturelle» de cette solution est évidemment le «Posons $t = Y/(X+1)$»; en principe, il n'est pas nécessaire de justifier ce genre d' «astuce» (au sens où la rigueur n'en souffre pas), mais cette solution produit un effet désagréablement artificiel. Il serait plus normal d'expliquer ce choix, en montrant par exemple que le point M_t est l'intersection du cercle-unité $\mathcal{C}$ et de la droite $[Y = t(X+1)]$, passant par A et de coefficient directeur t (un argument géométrique classique montre alors aussi la relation existant entre α et t).*



Exercices types : Fiche n°13

Ensembles de réels et fonctions numériques : comment bâtir des démonstrations rigoureuses

Énoncé.

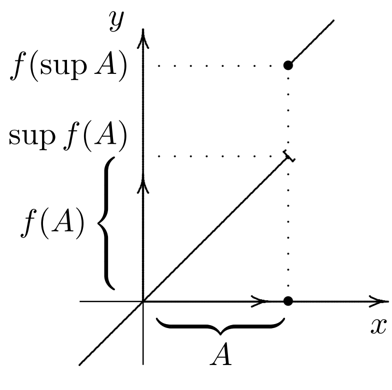
Soit f une injection croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; A un sous-ensemble non vide majoré de $\mathbf{R}$. Montrer que f est strictement croissante, que $\sup f(A)$ existe, que $\sup f(A) \leq f(\sup A)$, et donner un exemple où l'inégalité est stricte (on démontrera rigoureusement que cet exemple a bien toutes les propriétés souhaitées).

Méthode.

1 *Ce type d'exercice, outre la connaissance parfaite des définitions, demande beaucoup de rigueur; il faudra sans cesse montrer des propriétés de la forme* $(\forall x)\ldots$, *ce qui demande le plus souvent des raisonnements par l'absurde; on en a vu certains en cours. Par exemple, montrer que* b *est une borne supérieure revient le plus souvent à montrer que* $b' < b$ *n'est pas un majorant, etc.*

2 *Si on ne pense qu'aux fonctions usuelles (continues), il semble impossible d'obtenir un contre exemple à* $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$*; cet exercice est donc aussi un bon exemple des pièges dans lesquels une trop grande simplification de la théorie pourrait entraîner. Il ne faut pas pourtant tomber d'un excès dans l'autre : beaucoup de résultats intuitifs sont vrais (et ont même des démonstrations pas trop difficiles), et les contre-exemples sont souvent à prendre dans un catalogue classique (et finalement assez limité) de «monstres», d'ailleurs soigneusement étudiés dans le cours.*

3 *La construction de ce genre de contre-exemple passe souvent par une figure : puisqu'on veut que l'image du «bord droit» de* A *soit «plus grande» que le bord de l'image de* A*, on doit créer une «discontinuité» en ce point, et prendre par exemple une fonction telle que celle représentée ci-contre. Il suffira ensuite de choisir une fonction définie par des «formules» assez simples, pour que la démonstration soit aisée et ne prenne pas l'allure douteuse du «on voit sur le graphe que…»*



Solution.

f croissante $\iff \forall(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Supposons $x_1 < x_2$; f étant injective, on sait que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ absurde, donc $f(x_1) \neq f(x_2)$, ce qui montre que $f(x_1) < f(x_2)$. On a donc $\forall(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ce qui est la définition de «f est strictement croissante».

Si M est un majorant de A, on a, pour tout x de A, $x \leq M$, et, f étant croissante, $f(x) \leq f(M)$, ce qui prouve que $f(M)$ est un majorant de l'ensemble $f(A)$, qui est donc majoré et non vide; d'après le théorème de la borne supérieure, $\sup(f(A))$

existe. On vient de voir que $\sup(f(A))$ est inférieur à tous les $f(M)$ pour M majorant de A, donc en particulier, on a $\sup(f(A)) \leq f(\sup(A))$, puisque $\sup(A)$ est un majorant de A.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x$ si $x < 1$ et $f(x) = x + 1$ si $x \geq 1$, et prenons $A = [0; 1[$; montrons d'abord que f est strictement croissante : il est clair que (pour tout $x \in \mathbf{R}$), $x \leq f(x)$; soit $x_1 < x_2$; si $x_1 < 1$, on a $f(x_1) = x_1 < x_2 \leq f(x_2)$; si $x_1 \geq 1$, on a $x_2 \geq 1$ et $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 + 1) - (x_1 + 1) = x_2 - x_1 > 0$. f est donc injective, puisque si $x_1 \neq x_2$, on peut supposer $x_1 < x_2$, donc $f(x_1) < f(x_2)$ et $f(x_1) \neq f(x_2)$). Déterminons à présent $\sup(A)$: par définition, A est l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que $0 \leq x < 1$; 1 est donc un majorant de A (et $A \neq \emptyset$, puisque $0 \in A$). Montrons que 1 est la borne supérieure de A : si $b < 1$ était un majorant de A, on aurait déjà $b \geq 0$ (puisque $0 \in A$) ; posons $x = (1 + b)/2$. On aurait $x > 0$, et $x < 1$ puisque $1 + b < 1 + 1 = 2$ par hypothèse. x serait donc dans A, et $x > b = 2b/2$, ce qui est absurde puisque (par hypothèse) $\forall x \in A,\ x \leq b$. Il n'existe donc pas de tel b, ce qui prouve que $\sup(A) = 1$. Or $f(A) = A$ (par définition de f, puisque tous les éléments de A sont < 1) ; on a $f(\sup(A)) = f(1) = 2$, mais $\sup(f(A)) = \sup A = 1$. On a donc bien $\sup(f(A)) < f(\sup(A))$.

Remarques.

1 *Ce n'est que par respect de l'énoncé que la démonstration a été poussée «jusqu'au bout» : on considèrerait en pratique comme «évident» que* $\sup([0, 1[) = 1$, *et (peut-être) même que* f *est strictement croissante. Il est toutefois indispensable de savoir, en cas de besoin, redémontrer ce genre d'évidence, d'autant que ce type de démonstration sert de calque à des modèles plus abstraits, qu'on verra en Spé, en topologie par exemple.*

2 *Mais, comme on l'a dit dans le cours, ce n'est que dans des exemples très simples, comme ici, que l'on peut calculer directement (et exactement)* $\sup A$ *; le plus souvent, cette valeur est le résultat d'un calcul de limite, par exemple.*

3 *On verra au chapitre 8 que l'égalité* $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$ *est liée à la continuité de* f *en* $\sup(A)$ *; en effet,* $\ell = \lim_{x \to \sup A} f = f(\sup A)$ *si* f *est continue ; d'autre part,* $x < \sup(A) \Rightarrow f(x) < f(\sup A) \Rightarrow \ell \leq f(\sup A)$, *et enfin l'inégalité stricte signifierait qu'on ne peut se rapprocher à moins de* $(f(\sup A) - \sup f(A))/2$, *en contradiction avec la définition de Cauchy des limites...*

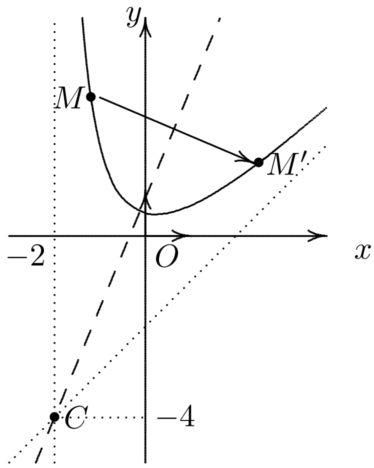
4 *Monotonie, bijectivité et continuité sont d'ailleurs liées par des théorèmes généraux, exposés à la fin du chapitre 9 : ainsi, toute bijection monotone est continue...*

Utilisation d'un logiciel de calcul formel : démonstration de l'existence d'une symétrie oblique

Énoncé.

Soit $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$. Étudier brièvement f, et déduire de cette étude la nature géométrique des éventuelles symétries du graphe. Donner la démarche permettant de prouver en particulier l'existence d'une symétrie oblique, et mettre en œuvre cette démarche à l'aide d'un logiciel approprié (tel que Maple) ; on recopiera les informations intermédiaires fournies par le programme, et permettant de conclure.

Méthode.



1 *L'existence éventuelle de symétries passe par l'établissement soigné du graphe de f (ce que les logiciels envisagés permettent aisément) ; on obtient le graphe reproduit ci-contre (la partie correspondant à $x < -2$ étant symétrique de celle tracée par rapport au point C) ; le raisonnement du chapitre 7 (**2. 3**), rappelé ci-dessous et dans le texte de la solution, correspond aux points indiqués sur cette figure.*

2 *C'est les calculs correspondant à ce raisonnement qu'il s'agit de faire exécuter par le logiciel; on doit donc déterminer l'axe de symétrie (la bissectrice des deux asymptotes) et les équations de la symétrie orthogonale, puis choisir un point quelconque $M(x, f(x))$, déterminer les coordonnées du symétrique $\mathcal{S}(M) = M'(x', y')$ en fonction de x, et contrôler enfin que $y' = f(x')$.*

Solution.

f est définie sur $\mathbf{R} - \{-2\}$; de dérivée $f'(x) = (x+2+\sqrt{5})(x+2-\sqrt{5})/(x+2)^2 = (x-x_1)(x-x_2)/(x+2)^2$, d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		x_1		-2		x_2		$+\infty$
signe de f′		+	0	−	‖	−	0	+	
variations de f	$-\infty$	↗	$-8,4...$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$0,46...$	↗	$+\infty$

(où les limites sont obtenues de manière évidente en -2 (par étude de signe) et en $\pm\infty$ (comme ci-dessous). L'étude des branches infinies donne d'abord une direction asymptotique $[Y = aX]$, avec $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$, puis on obtient $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = -2$; le graphe possède donc une asymptote verticale (d'équation $[X = -2]$), et une asymptote oblique d'équation $[Y = X - 2]$. On peut donc envisager un centre de symétrie, situé au point d'intersection $C(-2,-4)$ de ces deux droites ; et des axes de symétrie (orthogonale) correspondant aux deux bissectrices de ces deux droites ; ce que le graphe de f semble confirmer. La symétrie centrale serait montrée par changement de repère ($X = x+2$; $Y = y+4$), la nouvelle fonction étant impaire ; nous allons démontrer la symétrie par rapport à la bissectrice de pente positive.

Cherchons d'abord la pente (exacte) de cette droite : elle vaut $\tan 3\pi/8$, que l'on peut retrouver par les techniques du chapitre 3, mais que nos logiciels connaissent (attention toutefois sous Maple : π s'écrit `Pi` et non `pi`) : $\tan(3\pi/8) = 1+\sqrt{2}$. L'équation de la bissectrice Δ est donc $Y = -4 + (1+\sqrt{2})(X+2)$; si $M(x,y)$ a pour symétrique $M'(x',y')$, on doit donc avoir le milieu de MM' sur cette droite, et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ orthogonal à Δ. Sous Maple V, il suffira (!) d'écrire

```
solset:=solve({(x+xp)/2=X,(y+yp)/2=Y,Y=-4+(1+sqrt(2))*(X+2),
                    (x-xp)+(1+sqrt(2))*(y-yp)=0},{xp,yp,X,Y});
```

(rappelons que seul le `;` signale la fin d'une instruction) pour que les «formules» donnant x' et y' en fonction de x et y soient déterminées. Pour ne pas avoir à réécrire ces formules, utilisons la commande Maple `assign (solset);`, on vérifiera alors que l'instruction `xp;` renvoie bien $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}(x-y-2+2\sqrt{2})$, par exemple. Supposons alors que M soit sur le graphe, donc que $y = f(x)$; il ne reste plus, pour montrer que M' est aussi sur le graphe, et donc que celui-ci est symétrique, qu'à comparer $f(x')$ et y', ou plutôt à vérifier que l'expression compliquée $y' - f(x')$ se simplifie en 0 (si $x \neq -2$, ce que ces logiciels ne contrôlent pas !). Déclarant alors f par la commande `f:=x->(x*x+1)/(x+2);`, l'instruction `yp-f(xp);` produit une expression «horrible» en x et y ; une substitution (`subs(y=f(x),");`) donne

$$\frac{\left(-2\left(\dfrac{1-x^2}{x+2}\right)+(1+x^2)-\dfrac{(1+x^2)x}{x+2}\right)\sqrt{2}}{-\dfrac{1+x^2}{x+2}-2+x},$$

qu'une dernière simplification (`simplify (");`) montre égal à 0.

Remarques.

1 *La rédaction de l'étude de f a été rendue aussi brève que possible, et les détails des calculs n'ont pas été reproduits ; l'énoncé demande d'ailleurs seulement une interprétation des résultats, supposés contrôlés informatiquement.*

2 *Inversement, on n'a pas cherché à optimiser les calculs proposés (ce qui relèverait de la même démarche que de les exécuter à la main) ; l'avantage des outils informatiques est souvent de pouvoir adopter l'approche la plus directe, là où un long travail de préparation et de simplification s'imposait à l'ère pré-électronique.*

3 *Il est possible, après tout, que ce genre de calcul soit déjà automatisé par* Maple V *; mais il n'est pas simple de trouver où, dans l'énorme bibliothèque… Obtenir la performance optimale du logiciel utilisé peut d'ailleurs parfois s'avérer difficile. Ainsi, sous* Maple V, *tenter de chercher le signe de f' par une écriture telle que :* `factor (diff (f (x), x), x);`, *qui devrait «marcher», échoue, car les solutions ne sont cherchées que dans* $\mathbf{Q}$, *contrairement à* `solve` *(il faudrait ici une demande plus précise, par exemple :* `a := sqrt (5); (factor (diff (f (x), x), x, a);` *!), c'est un des nombreux cas où* `DERIVE` *est mieux adapté…*

Une démonstration rigoureuse d'inexistence de limite

Énoncé.

Déterminer les solutions de l'équation $\sin(1/x) = 0$ et de $\sin(1/x) = 1$; utilisant alors la définition de Cauchy de $\lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x) = \ell$, montrer qu'en prenant $\varepsilon < 1/2$, on aboutirait à une contradiction pour des x convenablement choisis parmi ces solutions; en déduire que la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Méthode.

1 *Bien évidemment, la forme «$\sin(1/0)$» (ou «$\sin(\infty)$») n'a pas de sens; aucun «calcul de limite» ne peut d'ailleurs permettre de résoudre ce genre de problème. Par contre, l'intuition va nous mettre sur la voie : remarquant que $\sin x$ oscille entre -1 et 1 quand x tend vers l'infini, on voit que cette fonction ne saurait «se rapprocher» de ℓ; on va donc montrer que l'inégalité $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ est fausse pour certaines valeurs de x.*

2 *Mais pour aboutir à une démonstration rigoureuse, il faudra maîtriser la définition de Cauchy (et peut-être aussi sa négation, puisqu'on va raisonner par l'absurde); elles sont rappelées dans le «formulaire» du chapitre 8, mais c'est un bon exercice de logique d'essayer de retrouver la négation par soi-même.*

Solution.

L'équation $\sin X = a$ (pour $-1 \leq a \leq 1$) a pour solutions $X = \operatorname{Asin} a + 2k\pi$ et $X = \pi - \operatorname{Asin} a + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbf{Z}$); en particulier, $\sin X = 1 \iff X = \pi/2 + 2k\pi$, et $\sin X = 0 \iff X = k\pi$. Posant $f : x \mapsto \sin(1/x)$ (avec $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$), on a donc $f(x) = 0 \iff x = 1/k\pi$, et $f(x) = 1 \iff x = 2/(4k+1)\pi$; posant $x_k = 1/k\pi$ et $x'_k = 2/(4k+1)\pi$, on aura $f(x_k) = 0$ et $f(x'_k) = 1$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Supposons alors que $\lim\limits_{0} f = \ell$; la définition de Cauchy des limites nous donne

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \neq 0)(|x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon),$$

et prenant en particulier $\varepsilon = 1/2$, $(\exists \alpha > 0)(\forall x \neq 0)(|x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1/2)$ $(*)$. Posons alors $n = E(1/\alpha) + 1$ (où α est un nombre tel que $(*)$ soit vraie, et E est la fonction partie entière). On aura donc $n > (1/\alpha)$ et $0 < x_n = 1/n\pi < \alpha/\pi < \alpha$; de même, $0 < x'_n = 2/(4n+1)\pi < 1/2n\pi < \alpha$. L'inégalité $(*)$ étant vraie pour tous les x tels que $|x| < \alpha$, elle doit être vraie pour x_n et x'_n, et on doit donc avoir $|-\ell| = |\ell| < 1/2$ et $|1 - \ell| < 1/2$. Mais d'après l'inégalité triangulaire, $|(1 - \ell) + \ell| \leq |1 - \ell| + |\ell|$, et on aurait donc $1 \leq |1 - \ell| + |\ell| < (1/2) + (1/2)$, ce qui est absurde. On en déduit que α n'existe pas, ou encore qu'il existe un ε ($\varepsilon = 1/2$) tel que la définition de Cauchy ne s'applique pas, et ce, quel que soit ℓ; en conclusion, f n'a donc pas de limite en 0.

Remarques.

1 *Plutôt que de procéder par l'absurde, on aurait pu vouloir montrer directement la négation de la définition de Cauchy (on dit alors souvent qu'on raisonne «par contraposition»), c'est-à-dire montrer que*

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\alpha > 0)(\exists x \neq 0)(|x| < \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon).$$

Mais le lecteur aura sans doute remarqué que si $\varepsilon = 1/2$ est suggéré par l'énoncé, le contre-exemple x (dépendant de α) que cette méthode réclame n'est pas très facile à trouver ; tout ce que nous avons pu montrer ici, c'est que x_n ou x'_n convenait.

2 *Comme cela se produit très fréquemment dans ce genre de démonstration, on est amené à combiner deux (ou plusieurs) inégalités, utilisant ainsi l'inégalité triangulaire, et «coupant les ε» ; ce procédé suppose en général le choix de α_1 et α_2 donnant des inégalités de la forme $x < \alpha_1 \Rightarrow (...) < \varepsilon_1$ et $x < \alpha_2 \Rightarrow (...) < \varepsilon_2$, que l'on combine pour obtenir $x < \alpha \Rightarrow (...) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, avec $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$.*

3 *En pratique, on retiendra que $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ n'existe pas (et c'est en fait le cas de toute fonction périodique non constante) ; cela nous permettra au chapitre 9, par exemple, de calculer rapidement la limite donnant la dérivée (en 0) d'une fonction telle que $x^\alpha \sin(x^\beta)$...*

Résolution d'une équation «générale» : comment rédiger l'utilisation d'un théorème

Énoncé.

Soit f une application continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, telle que $f(0) = 1$ et que $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer que l'équation $f(x) = 1/2$ admet (au moins) une solution.

Méthode.

1 *Sous son aspect «évident», cet exercice demande beaucoup d'attention pour être résolu rigoureusement. Le théorème des valeurs intermédiaires, en effet, ne s'applique qu'à un intervalle fermé $[a, b]$; il va donc falloir en «fabriquer» un, en revenant à la notion de limite.*

2 *En effet, dire que $\lim f = 0$, c'est dire qu'on peut se rapprocher de 0 à moins de ε près, donc, par exemple, à moins de 1/2. Il ne reste alors qu'à rédiger rigoureusement cet argument*

3 *On s'appliquera à présenter la rédaction en respectant le modèle vu au chapitre 1; la solution proposée ici, pour illustrer ce modèle, utilise une variante du théorème des valeurs intermédiaires, à laquelle elle ramène le problème.*

Solution.

Rappelons d'abord la définition de Cauchy de $\lim_{+\infty} f = 0$: f étant définie sur $\mathbf{R}^+$, on a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon).$$

Prenant $\varepsilon = 1/2$, on peut donc trouver A tel que $x > A \Rightarrow |f(x)| < 1/2$, et en particulier, prenant $c = A + 1$, on aura $|f(c)| < 1/2$, soit $-1/2 < f(c) < 1/2$. D'autre part, on peut énoncer ainsi le

Théorème des valeurs intermédiaires : *soit* g *une fonction continue sur l'intervalle* $[a, b]$, *et changeant de signe sur cet intervalle, c'est-à-dire telle que* $g(a)g(b) < 0$; *il existe* $x \in]a, b[$ *tel que* $g(x) = 0$.

Appliquons ce théorème à la fonction $g : x \mapsto f(x) - 1/2$, et à l'intervalle $[0, c]$. g est bien continue sur cet intervalle, puisque f l'est, et que g est la différence de deux fonctions continues; $g(0) = 1 - 1/2 = 1/2$, et comme $1/2 < f(c) < 1/2$, on a $-1 < g(c) < 0$. Ainsi, $g(0)g(c) < 0$; on peut appliquer le théorème, et trouver un x tel que $g(x) = f(x) - 1/2 = 0$, donc tel que $f(x) = 1/2$.

Dérivabilité d'une fonction définie par prolongement : quand il devient nécessaire de revenir aux définitions

Énoncé.

Montrer que la fonction $\tilde{f}$, obtenue en prolongeant par continuité en 0 la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^2 \sin(1/x)$, est (partout) dérivable, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Méthode.

1 *Cette fonction est un «monstre» classique, et l'examen de son graphe n'apprendra rien de très clair (il oscille de manière très rapide entre les deux paraboles $y = x^2$ et $y = -x^2$, et seul un «zoom» non centré, par exemple $10^{-3} < x < 1.1\ 10^{-3}$ et $-1.3\ 10^{-6} < y < 1.3\ 10^{-6}$, permettrait peut-être d'avoir une intuition de ce qui se passe). Le recours aux définitions est nécessaire, aucune «formule» ne permettant d'automatiser la tâche (c'est par exemple là qu'un logiciel tel que* `DERIVE` *s'avère complètement inutile); ces définitions sont par ailleurs indispensables ici, ne serait-ce que pour comprendre exactement l'énoncé proposé, qu'on pourrait peut-être donner aussi sous la forme* «montrer que la dérivée en 0 existe, mais que sa valeur ne découle pas du calcul de $f'(x)$ pour $x \neq 0$» *; mais on voit que le refus de notations rigoureuses risquerait ici de créer de graves doutes sur le sens exact de la question.*

2 *Il est nécessaire de bien lire ce type d'énoncé; le «piège» que tend cette fonction est évidemment lié au manque de «formule» en 0, mais il n'est pas toujours annoncé aussi clairement qu'ici. Le problème vient de ce que toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (sauf peut-être aux bornes de leur domaine), et qu'on finit par oublier que ce n'est nullement le cas général, et qu'en tout état de cause, les autres situations nécessitent une démonstration. Bien entendu, aborder ce genre d'exercice sans une définition claire de la dérivée (ou de la classe $\mathcal{C}^1$) est impossible, mais ce n'est qu'une «condition nécessaire»; il faudra souvent utiliser aussi des résultats de cours, comme cela est rappelé dans les remarques finales.*

Solution.

On sait que (pour tout $x \neq 0$), on a $-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$; par encadrement (le «théorème des gendarmes»), on a donc $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$; on peut donc prolonger f par continuité en posant $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$ et $\tilde{f}(0) = 0$, et la fonction $\tilde{f}$ sera une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. La fonction f étant composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle l'est également (sur $\mathbf{R}-\{0\}$), et sa dérivée est donnée par $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Déterminons $\tilde{f}'(0)$: par définition (du nombre dérivé en 0), on a $\tilde{f}'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x)$; par encadrement, cette limite existe et vaut 0. Ainsi, $\tilde{f}$ est dérivable en tout point, et $\tilde{f}'(x) = f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ si $x \neq 0$, et $\tilde{f}'(0) = 0$. Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas : en effet, si on avait $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \ell$, on aurait aussi $\lim\limits_{x \to 0} \cos(1/x) = -\ell$, et donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \cos X = -\ell$, ce qui est absurde. Ainsi, on n'a pas l'égalité $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0)$, et donc la fonction $\tilde{f}'$ n'est pas continue en 0, ce qui montre que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{D}^1$ (partout dérivable), mais non $\mathcal{C}^1$ (puisque sa dérivée n'est pas continue).

Remarques.

1 *Il a été dit dans le cours que si f est dérivable sur $]a,b]$, continue en a (donc sur $[a,b]$), et si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, f est dérivable en a, et $f'(a) = \ell$ (ce résultat se démontre en utilisant le théorème des accroissements finis, et la définition du nombre dérivé $f'(a)$). On voit donc qu'il n'est pas aisé de construire des fonctions dérivables et non $\mathcal{C}^1$, et que, réciproquement, il suffira, pour montrer que f est $\mathcal{C}^1$ en un point a, de calculer $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ (ou même seulement de montrer que cette limite existe et est finie).*

2 *En revanche, on ne doit pas (en principe) utiliser des méthodes aussi «lourdes» pour traiter le cas des fonctions «usuelles» : il suffira alors d'un rappel, tel que*

«f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine, puisqu'elle est composée (ou produit, ou quotient, etc.) de fonctions «élémentaires», qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$». *On apprendra à reconnaître les cas qui ne relèvent pas de cet argument : il s'agit essentiellement des fonctions définies par prolongement ou raccordement (comme l'exemple de cette fiche), de celles dans la définition desquelles figure une intégrale, et de fonctions «inconnues» (comme par exemple les solutions d'équations différentielles).*

Dérivation et techniques combinatoires

Énoncé.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+8x}}$; montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1/8, +\infty[$, et calculer explicitement $f^{(n)}(1/8)$ (la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f en $1/8$).

Méthode.

1 *La demande de calcul explicite «seulement en 1/8» est un piège : il est impossible de l'effectuer sans connaître $f^{(n)}(x)$ pour tout x (mais certaines simplifications ne se produisent pas dans la formule générale...)*

2 *Après des essais éventuels (pour deviner une «formule» qu'on pourrait démontrer par récurrence), il faut se résigner à ramener le problème à une combinaison de problèmes plus simples; ici, en posant $f(x) = x(1+8x)^{-1/2}$, on voit qu'on pourrait appliquer la formule de Leibnitz, si l'on connaissait les dérivées k^{emes} de $(1+8x)^\alpha$; or on connait celles de $(1+x)^\alpha$...*

3 *Comme on a $[x \mapsto x]'' = 0$, la formule de Leibnitz se réduit donc à une somme de deux termes; et on voit déjà que la réponse doit contenir des termes de la forme $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)$. Comme $\alpha = -1/2$, il reste donc à appliquer les méthodes du chapitre 5 pour ramener ce produit à des factorielles.*

Solution.

Déterminons d'abord $((1+x)^{-1/2})^{(k)}$ (sur l'intervalle $]-1, +\infty[$). La fonction $g_1 : x \mapsto g_1(x) = (1+x)^{-1/2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, par récurrence immédiate (c'est d'ailleurs une formule du cours), on a

$$g_1^{(k)}(x) = (-1/2)(-3/2)\cdots((1-2k)/2)(1+x)^{(-1-2k)/2} = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{1-2j}{2}\right) x^{\frac{-1-2k}{2}}.$$

Posant $g(x) = g_1(8x) = (1+8x)^{-1/2}$ (pour $x > -1/8$), on remarque que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que (par application successive de la formule de dérivation des fonctions composées) l'on a $g^{(k)}(x) = 8^k g_1^{(k)}(8x)$ $(*)$. Posons alors $h(x) = x$; on a donc $f = gh$. La fonction f, étant produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ (sur $]-1, +\infty[$), l'est elle aussi, et (d'après la formule de Leibnitz), on a (pour tout $x > -1/8$)

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x).$$

Or $h'(x) = 1$ et $h''(x)(0)$; on aura donc (pour tout $x > -1/8$) $f^{(n)}(x) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x)$; et en particulier $f^{(n)}(1/8) = (1/8)g^{(n)}(1/8) + ng^{(n-1)}(1/8)$. Calculons explicitement $g^{(k)}(1/8)$: la formule (∗) se ramène à $g^{(k)}(1/8) = (-8)^k a_k 2^{(-1-2k)/2}$, avec $a_k = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2} = \prod_{j=1}^{k}(2j-1)/2^k$. Remarquant alors que

$$\prod_{j=1}^{k}(2j-1) = \frac{\prod_{J=1}^{2k} J}{\prod_{j=1}^{k} 2j} = \frac{(2k)}{\prod_{j=1}^{k} 2j} = \frac{(2k)}{2^k k},$$

on voit que $g^{(k)}(1/8) = (-8)^k 2^{-3k-1/2} \frac{(2k)}{k} = \frac{(-1)^k (2k)}{k\sqrt{2}}$. En définitive,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(1/8) &= \frac{(-1)^n (2n)}{8n\sqrt{2}} + n\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)}{(n-1)\sqrt{2}} \\
&= \frac{(-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)}{8n(n-1)\sqrt{2}} + n\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)}{(n-1)\sqrt{2}} \\
&= (\frac{2n(2n-1)}{n} - 8n)\frac{(-1)^n(2n-2)}{8(n-1)\sqrt{2}} \\
&= \frac{(-1)^n(-4n-2)(2n-2)}{8(n-1)\sqrt{2}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)(2n-2)}{4(n-1)\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Remarques.

1 *On aura remarqué l'utilisation de la forme* $ab^{-1/2}$ *comme substitut à* $a/\sqrt{b}$*; cette écriture est à envisager dans la grande majorité des cas (il n'y a guère que dans l'utilisation d'identités trigonométriques telles que* $\sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$ *qu'elle peut s'avérer génante)*

2 *La constante 1/8 n'a sûrement pas été choisie au hasard : lorsque l'on rencontre un tel énoncé, il faut s'attendre à des simplifications. On aurait pu espérer un regroupement encore plus poussé des dernières factorielles, mais il faut en tout cas se ramener (autant que possible) à un seul terme : un prolongement fréquent de ce genre d'exercice est l'utilisation des valeurs trouvées comme coefficients dans la formule de Taylor (où interviennent d'autres factorielles), et il est fréquent que de nouvelles simplifications surviennent alors.*

3 *La méthode utilisée pour déterminer* $\prod(2k-1)$ *à l'aide de factorielles est une importante astuce à retenir, mais il est difficile de la généraliser (ainsi,* $\prod(3k-1)$ *ne peut s'exprimer de cette manière); une toute autre approche (qu'on retrouvera au chapitre 12) exploiterait la formule* $\ln(\prod a_k) = \sum \ln a_k$*, et les nombreuses techniques d'évaluation de sommations dont on dispose (par encadrement, par manipulation de sommes, par formules d'approximation...), mais cette méthode ne donne le plus souvent que des résultats approchés, qui ne peuvent servir qu'à des calculs de limites, par exemple.*

Exercices types : Fiche n° 18

Généralisation d'un théorème : récurrence finie

Énoncé.

Soit n un entier ≥ 1, f une fonction de classe $\mathcal{D}^n$ sur $]a,b[$, de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a,b]$, et $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une suite finie de réels, strictement croissante, telle que $a_0 = a$, $a_n = b$, et $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $f(a_i) = 0$ (où $[\![p,q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre p et q, autrement dit $\mathbf{N} \cap [p,q]$). Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$ («lemme de Rolle généralisé»).

Méthode.

1 *L'énoncé attire l'attention sur le fait que la propriété à démontrer est une généralisation du lemme de Rolle (qui correspond au cas $n = 1$); or, dès qu'on examine le cas $n = 2$, celui-ci donne naissance à deux valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule, et on peut le réutiliser entre ces deux valeurs, pour la fonction dérivée.*

2 *Il est donc clair qu'une certaine forme de récurrence doit être applicable, mais laquelle ? Il s'avère que la propriété à démontrer ne peut faire directement l'objet d'une récurrence, puisque le cas «$n+1$» ne découle nullement du cas «n» ; en effet, ce qui précède montre qu'il faudrait, par exemple, que l'hypothèse de récurrence garantisse* **deux** *valeurs pour lesquelles $f^{(n)}(x)$ s'annulerait. Il convient donc de procéder autrement, et par exemple, de remarquer que si f possède n «racines», f' en possèdera $n-1$; on peut en généraliser l'idée à une récurrence «descendante», qui sera donc limitée (à $n-1$ étapes).*

3 *Mais ce genre de rédaction «intuitive» manque gravement de rigueur ; une tentative plus soignée bute sur un délicat problème de notation, et la solution retenue ici est à la fois lourde et légèrement ambiguë; il serait plus normal (comme on le verra au chapitre 17) d'introduire des indices «doubles», notant ainsi c_{ik} les points où la dérivée k^{eme} s'annule ($[\![p,q]\!]$ a été introduit dans l'énoncé; on utilise aussi fréquemment dans ce genre d'exercice la notation $\mathbf{N}_p$ pour désigner l'ensemble des entiers $\geq p$).*

Solution.

Prenons pour propriété à démontrer :

$$\mathcal{P}(k) : \quad \exists (c_1, c_2, \ldots, c_{n-k+1}) \in \mathbf{R}^{n-k+1}, \ a < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-k+1} < b,$$
$$f^{(k)}(c_1) = f^{(k)}(c_2) = \cdots = f^{(k)}(c_{n-k+1}) = 0.$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie; en effet, on sait, d'après le lemme de Rolle appliqué à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ (avec $0 \leq i \leq n-1$) qu'il existe d_i vérifiant $a_i < d_i < a_{i+1}$ et $f'(d_i) = 0$. Posant $c_{i+1} = d_i$, on en déduit la propriété cherchée, car la suite (c_i) vérifie bien $a \leq a_i < c_{i+1} < a_{i+1} < c_{i+2} < a_{i+2} \leq b$ pour $i \in [\![0, n-2]\!]$. Montrons alors que, pour tout $k < n$, $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$. Si, en effet, on connait une suite $(c_i)_{i\in[\![1,n-k+1]\!]}$ strictement croissante telle que $f^{(k)}(c_i)=0$, la fonction $f^{(k)}$ étant dérivable sur $[c_1, c_{n-k+1}]$ d'après les hypothèses faites sur f, on peut appliquer le lemme de Rolle aux $n-k$ intervalles $[c_i, c_{i+1}]$ (pour $i \in [\![1, n-k]\!]$), obtenant ainsi pour chaque intervalle un c'_i tel que $(f^{(k)})'(c'_i) = f^{(k+1)}(c'_i) = 0$. La suite des c'_i étant strictement croissante (puisque $c_i < c'_i < c_{i+1} < c'_{i+1}$), on en déduit qu'elle satisfait la propriété $\mathcal{P}(k+1)$. Raisonnant alors par récurrence finie, on voit que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \leq n$, et donc que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, or $\mathcal{P}(n)$ affirme l'existence d'un c (avec $a < c < b$) tel que $f^{(n)}(c) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarques.

1 *En construisant une hypothèse de récurrence nettement plus complexe, telle que $\mathcal{P}(n) \iff \forall f \in \mathcal{C}^n([a,b]) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[,\ (\exists (c_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]},\ c_i \in]a,b[,$ avec (c_i) strictement croissante et $f(c_i) = f(a) = f(b)) \Rightarrow (\forall k \in [\![1,n]\!],\ \exists (d_j)_{j\in[\![1,n-k-1]\!]},$ (d_j) strictement croissante et (pour tout $j \in [\![1, n-k-1]\!]$) $d_j \in]c_1, c_{n-1}[$ et (ouf!) $f^{(k)}(d_j) = 0)$, il est possible de bâtir une démonstration par récurrence «ordinaire»; mais c'est là un cas où la rédaction semble alors désagréablement lourde et artificielle, pour ne pas dire plus...*

2 *Profitons-en pour rappeler les différents modes de raisonnement par récurrence :*

① *<u>Récurrence classique</u> : pour montrer que la proposition $(\forall n \in \mathbf{N}_p,\ \mathcal{P}(n))$ est vraie (où $\mathbf{N}_p = \{n \in \mathbf{N} \,/\, n \geq p\}$), il suffit de montrer :*

- $\mathcal{P}(p)$;
- $\forall n \in \mathbf{N}_p,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

C'est la démarche la plus fréquente; on pensera toutefois à des variations légères dans la rédaction; ainsi, on peut utiliser la forme : $\forall n \in \mathbf{N}_{p+1},\ \mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$, plus commode en particulier à l'oral.

② *<u>Récurrence cumulative</u> : pour montrer que la proposition $(\forall n \in \mathbf{N}_p,\ \mathcal{P}(n))$ est vraie, il suffit de montrer :*

- $\mathcal{P}(p)$;
- $\forall n \in \mathbf{N}_p,\ \underbrace{(\mathcal{P}(p) \text{ et } \mathcal{P}(p+1) \text{ et } \ldots \mathcal{P}(n))}_{\text{ou } (\forall i \in [\![p,n]\!], \mathcal{P}(i))} \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

Cette méthode a été utilisée dans la fiche n° 8; voici un exemple plus significatif : c'est la seule démarche raisonnable pour montrer que la suite définie par $u_1 = 1/2$ et (pour tout $n > 1$) $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k)^k$ est majorée par $1/2$ (on remarquera au passage que $u_{n+1} = u_n + (u_n^{n-1})/2$; on serait donc tenter d'utiliser une récurrence simple, mais cette dernière est vouée à l'échec !).

③ *<u>Récurrence finie</u> : pour montrer que la proposition $(\forall n \in [\![p,m]\!],\ \mathcal{P}(n))$ est vraie, il suffit de montrer :*

- $\mathcal{P}(p)$;

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in [\![p,m]\!],\ (n < m \text{ et } \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \\ \qquad \textit{(récurrence finie classique)} \\ \text{ou :} \\ \bullet\ \forall n \in [\![p,m]\!],\ \big(n < m \text{ et } (\forall k \in [\![p,n]\!],\ \mathcal{P}(k))\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \\ \qquad \textit{(récurrence finie cumulative).} \end{array}\right.$$

On vient d'en voir un exemple; on pourra (après avoir étudié le chapitre 18) essayer de démontrer que si E est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, et si $(f, \mathbf{x}_0, n) \in \mathcal{L}(E) \times E \times \mathbf{N}^*$ vérifie $f^n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ et $f^{n-1}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, alors $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0), \ldots, f^{n-1}(\mathbf{x}_0))$ est une famille libre (appelant $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n-1}$ une famille de $\mathbf{K}^n$ telle que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, on prendra $\mathcal{P}(k) : \lambda_k = 0$, et on raisonnera par récurrence finie cumulative).

Exercices types : Fiche n° 19

Calculs de développements limités

Énoncé.

Déterminer un développement limité à l'ordre 3 (en 0) de la fonction

$$f : x \mapsto \exp(\frac{1}{1+2x}).$$

Méthode.

1 $\exp(A) = e^A$ *(c'est un truc de notation parfois employé pour faciliter l'écriture d'exponentielles). Un* DL_3 *de* $1/(1+2x)$ *est aisé à obtenir par substitution dans celui de* $1/(1+x)$*, mais comme on ne connait que le DL «standard» de* e^x *en 0, il faudra penser à transformer* $e^{a+g(x)}$ *en* $e^a.e^{g(x)}$*.*

2 *Le reste ne présente pas de difficulté théorique, mais on peut facilement se «noyer» dans les calculs, ou au contraire sacrifier la rigueur en négligeant certains termes sans justification suffisante : après avoir esquissé les calculs nécessaires au brouillon, on vérifiera que l'ordre des DL intermédiaires est bien choisi (ni insuffisamment précis, ni inutilement élevé), puis on rédigera en prenant en compte* **toutes** *les «erreurs» à l'aide de la notation* $\varepsilon_k(x)$*, et éventuellement en décomposant en étapes, ramenant* f *à des fonctions plus simples ayant même DL.*

Solution.

On sait que $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On a donc $1/(1+2x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$, avec $\varepsilon_1(x) = 8\varepsilon(2x)$, et donc $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Posons alors $P(x) = -2x + 4x^2 - 8x^3$ et $u(x) = P(x) + x^3\varepsilon_1(x)$. Comme on sait (DL de Young) que $\exp(X) = 1 + X + X^2/2 + X^3/6 + X^3\varepsilon_2(X)$, avec $\lim_{X\to 0} \varepsilon_2(X) = 0$, on aura donc

$$f(x) = e(1 + u(x) + (u(x))^2/2 + (u(x))^3/6 + (u(x))^3\varepsilon_2(u(x))).$$

Or on sait que $u(x) \underset{0}{\sim} -2x$, donc $(u(x))^3 \underset{0}{\sim} -8x^3$, et

$$\lim_{x\to 0} \frac{(u(x))^3\varepsilon_2(u(x))}{x^3} = -8 \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(u(x)) = 0 \text{ (par composition de limites),}$$

ce qui montre qu'on peut écrire $(u(x))^3\varepsilon_2(u(x)) = x^3\varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$, et donc que les fonctions f et $g : x \mapsto g(x) = e(1 + u(x) + (u(x))^2/2 + (u(x))^3/6)$ ont même développement limité à l'ordre 3 en 0. Montrons à présent qu'il en est de même de $h(x) = e(1 + P(x) + (P(x))^2/2 + (P(x))^3/6)$. De manière plus générale, on a $(u(x))^k - (P(x))^k = (u(x) - P(x)) \left(\sum_{j=0}^{k} (u(x))^{k-j}(P(x))^j \right)$, et comme cette somme a pour limite 0 (si $k > 1$), on voit que $(u(x))^k - (P(x))^k \underset{0}{\ll} u(x) - P(x)$, ce qui prouve le résultat annoncé. Le DL_3 de f sera donc le polynôme h tronqué à l'ordre 3; le calcul (que l'on simplifierait en écrivant par exemple $(P(x))^3 = -8x^3(1 + r(x))^3 \underset{0}{\sim} -8x^3$) aboutit à

$$f(x) = e - 2ex + 6ex^2 - \frac{52ex^3}{3} + x^3\varepsilon_4(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0).$$

Remarques.

1 *Un calcul direct était possible, car, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle admet un DL de Young :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3),$$

mais sa détermination explicite est assez pénible; on obtient par exemple $f'''(x) = \dfrac{-192x^2 - 288x - 104}{(2x+1)^6} f(x)\ldots$

2 *La solution pourrait être entièrement rédigée en introduisant d'autres «termes d'erreur» (ε_5, ε_6, …), mais, outre le côté fastidieux et répétitif du texte ainsi produit, cela dissimulerait le fait qu'il s'agit en réalité de démontrer des règles générales (de substitution de DL, de calculs de puissances, etc.) qui, bien que «hors-programme» et généralement supposées «admises», doivent pouvoir être justifiées (au moins dans les cas simples usuels).*

3 *Les calculs finaux n'ont pas été «rédigés»; on recommande en général de les faire figurer dans le cours du texte, en n'en présentant que les développements essentiels (on écrira ainsi :*

«$(1+3x)^5 = 1 + 15x + 90x^2 + x^2\varepsilon(x)$ (formule du binôme)»*), mais en prenant garde en revanche à ce que les erreurs éventuelles puissent être aisément décelées; on pourra par exemple écrire ainsi le calcul d'un développement :*

$$\begin{aligned}(2x^2 + x - 1)(4x^3 - 5x + 2) &= 8x^5 + 4x^4 - 4x^3 \\ &\qquad\quad -10x^3 - 5x^2 + 5x \\ &\qquad\qquad\quad + 4x^2 + 2x - 2 \\ &= 8x^5 + 4x^4 - 14x^3 - x^2 + 7x - 2.\end{aligned}$$

4 *Les logiciels de calcul formel donnent aisément les «réponses» à ce genre d'exercice (on se méfiera toutefois des fonctions composées compliquées; DERIVE, en particulier, utilise systématiquement la formule de Taylor, ce qui peut amener à un temps de calcul démesuré) mais, bien entendu, ne rédigent pas les étapes intermédiaires et ne fournissent aucune justification; il est même possible de «planter» ces machines : on pourra utilement réfléchir à l'affirmation «f, définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)\sin g(x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, est négligeable en 0 devant x^n (et admet donc pour DL_n le polynôme nul !)», qui n'est pas très difficile à prouver quelle que soit la fonction g (avec $D_g = \mathbf{R}^*$), alors que, même avec $g(x) = 1/x$ (cas dans lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et a toutes ses dérivées nulles en 0), DERIVE et Maple V refusent de se prononcer …*

Exercices types : Fiche n° 20

Utilisation non «locale» de la formule de Taylor

Énoncé.

Soit $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer que s_n est croissante majorée (on pourra remarquer que $n! > 2^n$ pour tout $n \geq 4$). En déduire la convergence de s_n vers une limite que l'on déterminera, en appliquant la formule de Taylor à $x \mapsto e^x$ sur un intervalle bien choisi.

Méthode.

1 *Les suites de ce type seront étudiées plus précisément en Spé (il s'agit de séries numériques) ; mais ces connaissances ne sont pas nécessaires ici : la croissance est «évidente», la majoration (par une somme de termes d'une suite géométrique) est «donnée», et la formule des suites géométriques permettra de conclure (en utilisant le théorème de la borne supérieure).*

2 *La vraie difficulté est donc l'emploi de la formule de Taylor ; on commence par la rappeler : ici, on aura donc*

$$e^b = e^a + e^a(b-a) + \cdots + e^a \frac{(b-a)^n}{n!} + R_n;$$

comme toutes les dérivées de e^x valent 1 en 0, on voit qu'on est amené à utiliser un intervalle $[0, b]$; et la «disparition» des termes $(b-a)^k$ amène à choisir $b = 1$, pour obtenir $e^1 = s_n + R_n$. Le seul problème restant sera donc de montrer que R_n tend vers 0.

Solution.

1 On peut d'abord remarquer que $s_{n+1} - s_n = 1/(n+1) > 0$, ce qui prouve que s est (strictement) croissante; montrons par récurrence que $n > 2^n$ si $n \geq 4$: c'est vrai pour $n = 4$ (puisque $24 > 16$) et si $k > 2^k$, on aura $(k+1) = (k+1)k > (k+1)2^k > 2.2^k$, puisque $k > 1$. Par récurrence (immédiate), à partir de $n = 4$, on en déduit la propriété cherchée. Ainsi, on a $s_n = s_3 + \sum_{k=4}^{n} (1/k) < s_3 + \sum_{k=4}^{n} (1/2^k)$ (pour $n \geq 4$); appliquant la formule des suites géométriques à cette dernière somme, on obtient

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{n-4} (1/2^k) = \frac{1}{16} \frac{1 - (1/2^{n-3})}{1 - 1/2} < \frac{1}{8},$$

et donc $s_n \leq s_3 + 1/8 < 3$. La suite s_n est donc croissante et majorée; d'après le théorème de la borne supérieure, on en déduit qu'elle converge (vers une limite inférieure à 3).

2 La fonction $x \mapsto e^x$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange (à l'ordre n) sur tout intervalle $[a,b]$; ainsi, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$e^b = e^a + e^a(b-a) + e^a\frac{(b-a)^2}{2} + \cdots + e^a\frac{(b-a)^n}{n} + e^c\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)}.$$

Prenant en particulier $a = 0$ et $b = 1$, on obtient l'existence d'un $c_n \in]0,1[$ tel que

$$e = 1 + 1 + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)}.$$

On a donc $e = s_n + e^{c_n}/(n+1)$. Or la suite $r_n = e^{c_n}/(n+1)$ converge vers 0, puisque elle est positive et majorée par $e/2^n$, comme on l'a vu précédemment. Finalement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = e.$$

Remarques.

1 *Le préliminaire destiné à assurer la convergence (par majoration) n'est pas nécessaire ici, puisqu'on peut montrer directement que le reste tend vers 0; mais cette technique est un «standard» en Spé (il s'agit de ce qu'on appelle les «critères de convergence» des séries), et elle est souvent énoncée sous cette forme dans des débuts de problèmes. Un exemple analogue est proposé dans la fiche n° 21.*

2 *L'indication de la fonction à utiliser n'est pas toujours fournie ! En général, l'apparition d'un DL «classique» doit mettre sur la voie; on pourra par exemple calquer cet exercice pour montrer que la suite* $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/(k+1)$ *converge : on remarque qu'il s'agit du DL de* $\ln(1+x)$ *avec* $x = 1$ *(ce qui, en soi, ne constitue* **nullement** *une preuve de quoi que ce soit), et on est amené à appliquer la formule de Taylor à* $\ln(1+x)$ *sur l'intervalle* $[0,1]$ *(ou à* $\ln x$*) sur* $[1,2]$ *); un encadrement soigné du reste aboutit à* $\lim u_n = \ln 2$.

3 *En fait, la plupart des applications «globales» de la formule de Taylor sont de ce type, c'est à dire qu'on essaie d'encadrer le reste pour* x *fixé, et* n *tendant vers l'infini (en pratique, on majore ce reste (en valeur absolue) par une expression de la forme* $x^n M_n$*, où* $M_n = (max|f^{(n)}|)/n!$*). On verra en Spé que cette technique s'applique bien à une large classe de fonctions : les fonctions «développables en série entière».*

Exercices types : Fiche n° 21

Suites définies par itération

Énoncé.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et (pour tout $n \in \mathbf{N}$) $u_{n+1} = u_n^2 - 1/4$. Étudier ses variations et montrer sa convergence.

Méthode.

1 *Pour cet exercice encore, un travail expérimental simple s'impose : le «programme» d'une ligne :* `Ans²-.25`*, exécuté répétitivement, donne (en une dizaine d'itérations)* $u_{10} \simeq u_{11} \simeq -0,2071$. *On en déduit que cette «limite» doit vérifier* $L \simeq L^2 - 1/4$, *et donc* $L = (1-\sqrt{2})/2$*; c'est ce qu'on va chercher à démontrer rigoureusement.*

2 *Le comportement «oscillant» et borné de la suite est également apparu lors de cette étude; sa démonstration (par récurrence) utilise l'encadrement* $-1/4 \leq u_n \leq 0$, *et le fait que* $f : x \mapsto x^2 - 1/4$ *est monotone (décroissante) dans cet intervalle.*

3 *Mais la preuve rigoureuse de la convergence est plus difficile; il convient d'étudier la suite* $d_n = |u_n - L|$*; remarquant que* $d_{n+1} = |f(u_n) - f(L)|$, *on est amené à utiliser l'inégalité des accroissements finis dans l'intervalle* $[-1/4, 0]$, *et à comparer la suite* (d_n) *à une suite géométrique; le résultat cherché résultera alors de ce que* $\max\limits_{x\in[-1/4,0]} |f'(x)| < 1$.

4 *Il serait intéressant de compléter ce travail par une étude graphique de la suite (en utilisant la méthode de «report par la première bissectrice»); on obtient un enroulement en colimaçon autour du point-limite (intersection du graphe de* f *et de la droite [*$Y = X$*]).*

Solution.

1 Montrons d'abord par récurrence que (pour tout $n \in \mathbf{N}$) $-1/4 \leq u_n \leq 0$: c'est vrai pour u_0, et $-1/4 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1/16 \Rightarrow -1/4 \leq x^2 - 1/4 \leq -3/16$; comme $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec $f : x \mapsto x^2 - 1/4$), le résultat s'en déduit. La fonction f étant strictement décroissante dans l'intervalle $[-1/4, 0]$, la suite (u_n) est «oscillante» : en effet, $u_n > u_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) < f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, et de même $u_{n+1} < u_{n+2} \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+3}$; par récurrence, et remarquant que $u_1 < u_0$, on voit qu'on aura $-1/4 \leq u_1 < u_3 < u_5 < \cdots < u_4 < u_2 < u_0 \leq 0$.

2 Étudions à présent la convergence de u_n. Remarquons d'abord que si u_n converge vers L, on a nécessairement $-1/4 \leq L \leq 0$ (et en fait $L = \sup u_{2k+1} = \inf u_{2k}$); d'autre part, on doit avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(L)$ (puisque f est continue) et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$ (par composition des limites, en posant $N = n + 1$). Ainsi, L doit vérifier $L = f(L) = L^2 - 1/4$ (on dit que L est un point fixe de f); or la seule solution de cette équation appartenant à $[-1/4, 0]$ est $L_0 = (1-\sqrt{2})/2$.

Il faut donc montrer la convergence de (u_n) vers L_0 ; nous allons pour cela étudier la suite «auxiliaire» $d_n = |u_n - L_0|$.

Remarquons d'abord que $d_{n+1} = |u_{n+1} - L_0| = |f(u_n) - f(L_0)|$; or, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[-1/4, 0]$, le théorème des accroissements finis affirme, pour tout couple (a, b) de cet intervalle tel que $a < b$, l'existence d'un c (strictement compris entre a et b) tel que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$; remarquant que, pour tout $c \in [-1/4, 0]$, on a $|f'(c)| = 2|c| \leq 1/2$, on en déduit (inégalité des accroissements finis) que $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|/2$, et donc que la suite (d_n) vérifie $d_{n+1} \leq d_n/2$; par une récurrence immédiate, cela implique que $d_n \leq d_0/2^n$; d_n est donc positive et majorée par une suite convergeant vers 0 ; on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L_0$.

Remarques.

1 *Le «théorème du point fixe» ($f(L) = L$) utilisé ici est applicable à toute suite définie par itération d'une fonction continue (et on peut même le généraliser à des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n) + g(n)$, par exemple) ; mais, bien évidemment, il ne donne qu'une condition nécessaire, autrement dit, on ne peut l'utiliser que pour conclure à la divergence, dans le cas où l'équation n'a pas de solution dans un intervalle contenant les u_n. Ainsi, par exemple, la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1$ «devrait» converger vers le point fixe $L = (1 - \sqrt{5})/2$, mais en fait, cette suite est tout simplement la suite périodique $(0, -1, 0, -1, \ldots)$!*

2 *La situation serait beaucoup plus simple si f était croissante : non seulement la suite u_n est alors monotone, mais il suffit de remarquer qu'elle est par exemple majorée par L pour en déduire qu'elle converge (attention tout de même à ce que ce peut être vers un autre point fixe $L' < L$).*

3 *On peut (rarement) se dispenser du théorème des accroissements finis, car en fait la convergence de (d_n) repose sur le fait que f est k-lipschitzienne avec $k < 1$, sur un intervalle convenable (rappelons que cela veut dire que, pour tout a et b de cet intervalle, $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$) ; d'un autre côté, ce genre d'inégalité se démontre le plus souvent en utilisant le t. a. f...*

4 *S'il fallait développer une théorie générale, on pourrait (en supposant f de classe $\mathcal{C}^1$) se contenter de calculer $a = |f'(L)|$, et remarquer que dans un voisinage assez petit de L, f est $(a+\varepsilon)$-lipschitzienne ; cette idée, combinée avec l'étude de $f \circ f \circ \cdots \circ f$ est le point de départ de la théorie moderne de ces questions (l'étude des «systèmes dynamiques»). Mais en revanche, bien que $g = f \circ f$ soit croissante, l'étude de la suite (u_{2n}) par itération de g amène en général à des calculs inextricables dans un cas concret tel que celui de cet exercice.*

5 *Enfin, on pourra reprendre la fiche n° 9, qui introduisait la suite u_n sous la forme $P_n(-1/4)$; on voit donc que la suite des $P_n(X)$ converge pour certaines valeurs de X ; la méthode que nous venons de voir permettrait d'aboutir à l'intervalle $]-3/4, 1/4]$, sur lequel on dit que la suite de* **fonctions** *(P_n) converge (simplement, comme on l'expliquera en Spé) vers la fonction $x \mapsto (1 - \sqrt{1 - 4x})/2$ (cette valeur étant «évidente», d'après le théorème du point fixe). Mais cette suite converge également en $X = -3/4$ vers $L_{-3/4} = -1/2$, bien que $f'(-3/4) = -1$; la méthode précédente n'est alors plus applicable (car on ne peut plus majorer d_n) et des idées bien plus «sophistiquées» (l'une d'elle est l'étude de la «série» $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$) devraient être employées...*

Exercices types : Fiche n° 22

Suites définies par sommation

Énoncé.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, et $v_n = u_n + a/n$. Montrer qu'il existe une constante a telle que u et v soient deux suites adjacentes ; en déduire, pour tout α réel ≤ -2, la convergence de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par $w_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$.

Méthode.

1 *La définition des suites adjacentes étant supposée connue, il suffit de la contrôler, ce qui devrait donner une condition sur a ; on en déduira alors la convergence de u.*

2 *Et il ne restera plus qu'à remarquer que w est une suite croissante, et que u majore w !*

Solution.

1 Deux suites u et v sont dites adjacentes si u et v sont monotones, de variations opposées, et si $\lim(v-u) = 0$. Il est clair ici que u est croissante (en effet $u_{n+1} - u_n = (n+1)^{-2} > 0$) et que $\lim(v-u) = \lim\limits_{n\to+\infty} an^{-1} = 0$; la définition des suites adjacentes demande donc seulement de montrer que v est décroissante. Or $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + a(n+1)^{-1} - n^{-1} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{a}{n+1} - \frac{a}{n} = \frac{n - a(n+1)}{n(n+1)^2}$; prenant $a = 1$ (la plus petite valeur telle que ce nombre soit négatif pour tout n), on voit que la suite $(u_n + 1/n)_{n\geq 1}$ est adjacente à la suite u; d'après le cours, ces deux suites convergent donc vers la même limite.

2 La suite w est croissante (pour la même raison que u), or on a, pour tout k, $\alpha \leq -2 \Rightarrow k^{\alpha} \leq 1/k^2$, et donc $w_n \leq u_n$. Comme $u_n \leq \lim u$, w est majorée, et donc convergente d'après le théorème de la borne supérieure.

Remarques.

1 *On sait (et on le démontrera en Spé) que $\lim u = \pi^2/6$; ce résultat ne peut absolument pas se déduire de la méthode qu'on vient de voir, ni même d'améliorations éventuelles de l'écart $v - u$ (en prenant par exemple $v = u + 1/n + b/n^2 \dots$)*

2 *En revanche, il est en effet possible d' «améliorer» v, obtenant ainsi une meilleure estimation de l' «erreur» $(\lim u) - u_n$; cette méthode (appelée «accélérateur de convergence») permet un calcul numérique plus rapide de la limite.*

3 *En fait, la convergence de w a lieu dès que $\alpha < -1$; c'est ce qu'on verra en Spé; c'est la conséquence d'une importante technique de comparaison de suites et d'intégrales. On en déduirait également que w diverge pour $\alpha = -1$; on a vu d'ailleurs (DM n° 11) que $\lim(\ln n - \sum_{k=1}^{n} 1/k) = \gamma \simeq 0,577$.*

Sommes de Riemann

Énoncé.

Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie (pour $n \geq 1$) par :

$$s_n = \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ (on pourra exprimer s_n à l'aide d'une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto x\ln x$).

Méthode.

1 *Ce genre d'exercice doit être pris «à l'envers» : on, commence par manipuler une somme de Riemann plausible, jusqu'à faire apparaître s_n. Ici, on a (en gros) $(1/n)\sum(k/n)\ln(k/n) = (1/n^2)\sum k\ln k - (1/n^2)\ln n\sum k$, ce qui semble être à peu près $-s_n$, sachant que $\sum k = n(n+1)/2 \sim n^2/2$.*

2 *Mais, outre les détails finaux du calcul de* $\lim s_n$*, il reste à régler deux problèmes : d'une part, la définition des sommes de Riemann diffère souvent (comme ici) de la somme cherchée par quelques termes; d'autre part, la fonction à approcher doit être intégrable, donc $\mathcal{C}^0$ par morceaux; ici, il faudra donc prolonger f en 0 (par continuité), et calculer l'intégrale par un calcul de limite...*

Solution.

La fonction $f : x \mapsto f(x) = x\ln x$ (définie sur $\mathbf{R}_+^*$) se prolonge en 0 par continuité en posant $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $\tilde{f}(0) = 0$ (puisque $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$). Introduisons alors la somme de Riemann associée à $\tilde{f}$ sur l'intervalle $[0,1]$ (de pas constant $1/n$)

$$S(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{f}(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}.$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S(n) = I = \int_0^1 \tilde{f}(x)\,dx$. Calculons cette intégrale : on a $I = \lim\limits_{\varepsilon\to0} I_\varepsilon$, avec $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \tilde{f}(x)\,dx = \int_\varepsilon^1 x\ln x\,dx$, et cette dernière intégrale se calcule par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x}{2}\,dx \\ &= -\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}, \end{aligned}$$

et donc $I = \lim\limits_{\varepsilon\to0} I_\varepsilon = -1/4$. Remarquant alors que

$$s_n = \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k = \frac{\ln n}{2} - \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln(k/n) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln n\right),$$

et donc que

$$\begin{aligned} s_n &= -S(n) + \frac{\ln n}{2n^2}(n^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k) \\ &= -S(n) + \frac{\ln n}{2n^2}(n^2 - n(n+1)) \\ &= -S(n) + \frac{\ln n}{2n}, \end{aligned}$$

on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} s_n = -I = \frac{1}{4}$.

Remarques.

1 *Sans l'indication de l'énoncé, une autre approche serait plus naturelle : encadrer* $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln k$ *par* $\int_1^n f(x)\,dx$ *et par* $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ *(méthode des rectangles). On obtient (après intégration par parties)*

$$\frac{n^2}{2}\ln n + \frac{-n^2+1}{4} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^2}{2}\ln(n+1) + \frac{-(n+1)^2+1}{4},$$

et donc $S_n \underset{\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}\ln n$ *; mais il est souvent plus difficile de conclure quand on a encadré de cette manière, les termes suivants (du «développement asymptotique» des* S_n*) n'apparaissant pas aussi simplement ; ici, par exemple, il faudrait utiliser une formule du type* $\ln(n+1) = \ln n + (1/n - 1/2n^2 \ldots)$ *(Taylor !)*

2 *La définition «officielle» des sommes de Riemann à pas constant (associées à* f *sur* $[a,b]$ *) est* $S(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ *; cela n'a guère d'importance en pratique, puisque* $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) = S(n) + \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))$*, par exemple, et que la limite des termes ajoutés est nulle ; une rédaction rigoureuse doit cependant le mentionner.*

3 *Le calcul de* I *passe par un calcul de limite ; on vérifiera que la formule d'intégration par parties (du moins sous la forme donnée en cours) ne pouvait s'appliquer directement ; cette méthode est encore plus utile pour exploiter des changements de variable «impropres», non dérivables aux bornes du domaine (par exemple,* $x = \sin t$ *sur l'intervalle* $[-1,1]$ *). Ce qui justifie ce calcul, c'est le «théorème de continuité aux bornes» : si* $a < b$*, et si* f *est bornée (et intégrable) sur* $[a,b]$*,* $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{X\to a^+} \int_X^b f(x)\,dx$ *; en effet,* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^X f(x)\,dx + \int_X^b f(x)\,dx$*, et* $|\int_a^X f(x)\,dx| \leq \int_a^X |f(x)|\,dx \leq M(X-a)$ *(avec* $M = \sup_{[a,b]} |f|$*), d'où le résultat annoncé ; ce théorème s'emploie souvent plus simplement dans le cas où* f *est continue, car on a alors* $\int_X^b f(x)\,dx = F(b) - F(X)$ *(où* F *est une primitive de* f*), et le résultat découle de la continuité de* F *en* a*, due à ce que* F *est dérivable !*

Suites d'intégrales

Énoncé.

Soit $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $I_n = \int_0^{\pi/4}(\tan x)^n\,dx$. Calculer $I_n + I_{n+2}$ et en déduire les valeurs de I_{2n} sous forme d'une somme (on pourra calculer de deux manières $\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k(I_{2k}+I_{2k+2})$). Montrer que la suite I_n est strictement décroissante, et déterminer sa limite. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi/4$.

Méthode.

1 *La relation de récurrence demandée entre les I_n résulte ici d'un simple changement de variable, puisque $(\tan x)' = 1+\tan^2 x$; dans des exercices analogues, il faudra souvent faire preuve de plus d'imagination, et aussi penser à intégrer par parties...*

2 *Le calcul de proche en proche des I_n en résulte; on peut déja prévoir que les deux suites I_{2k} et I_{2k+1} sont «indépendantes». L'énoncé amène d'autre part à supposer qu'il faudra écrire I_n sous la forme $\sum(-1)^k a_k$, la valeur annoncée de la limite finale permettant de conduire le calcul...*

3 *Les inégalités $I_{n+1} < I_n$ sont une simple conséquence de la comparaison des fonctions intégrées; il n'en va pas de même de la limite. Si la convergence est, comme ici, assurée, on pourra parfois utiliser un argument de «point fixe» : $\lim I_n = \lim I_{n+2}$, mais souvent cela ne donne qu'un résultat trivial de la forme $L = L$; il faudrait alors remarquer que (pour $0 \le x < \pi/4$) $\lim_{n\to+\infty}(\tan x)^n = 0$, et utiliser un découpage de $[0,\pi/4]$ en deux intervalles, ou l'on majorera indépendamment l'intégrale, en prévoyant que, comme le veut l'intuition (qu'on pourra au besoin confirmer par une expérimentation numérique), on doit avoir $\lim I_n = 0$: la rédaction correspondant à cette méthode est précisée dans les remarques finales.*

Solution.

1 Remarquons d'abord que (par linéarité) $I_n+I_{n+2} = \int_0^{\pi/4}((\tan x)^n+(\tan x)^{n+2})\,dx$, donc $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4}(1+\tan^2 x)(\tan x)^n\,dx$; comme $(\tan)'(x) = 1+\tan^2 x$, on a donc

$$I_n + I_{n+2} = \left[\frac{(\tan x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

On a donc, posant $a_k = 1/(2k+1)$, $I_{2k} + I_{2k+2} = a_k$, donc $S = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k(I_{2k} + I_{2k+2}) = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k a_k$; or, par décalage, on a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k I_{2k} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k I_{2k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k I_{2k} + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1} I_{2k} \\ &= I_0 - (-1)^p I_{2p}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit $I_{2p} = (-1)^p(I_0 - \sum_{k=0}^{p-1} a_k)$ (on obtiendrait de même une relation entre les I_{2k+1}, en posant $b_k = 1/(2k)$). Ainsi, et en définitive, on a (pour $n \geq 1$)

$$I_{2n} = (-1)^n(I_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{2k+1}).$$

2 On a $0 \leq x \leq \pi/4 \Rightarrow 0 \leq \tan x \leq 1$ (la fonction tan étant croissante), et $(\tan x)^{n+1} \leq (\tan x)^n$; d'après le théorème de comparaison des intégrales définies, on a donc $I_{n+1} \leq I_n$, et comme $h : x \mapsto h(x) = (\tan x)^n - (\tan x)^{n+1}$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \pi/4]$ (puisque $h(\pi/6) = 3^{n/2} - 3^{(n+1)/2}$), on a $\int_0^{\pi/4} h(x)\, dx > 0$, et donc $0 < I_{n+1} < I_n$. La suite (I_n), étant décroissante et minorée, converge ($\lim_{n\to+\infty} I_n = \ell$) et donc $\lim_{n\to+\infty} I_{n+2} = \ell$; passant à la limite dans la relation trouvée en **1**, on a donc $\ell + \ell = \lim_{n\to+\infty} 1/(n+1) = 0$, d'où $\ell = 0$. En définitive, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Remarques.

1 *Ce type de relation entre intégrales est assez fréquent; ainsi, les* $E_n = \int_0^a x^n e^x\, dx$ *sont reliés (par intégration par parties) par la relation* $E_{n+1} = \dfrac{a^{n+1}e^a}{n+1} - \dfrac{E_n}{n+1}$; *on a, de manière moins évidente,*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \Big[\sin x \cos x^{n-1}\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\, dx,$$

d'où on tire la relation (due à Wallis) entre les $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ *:*

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

.

2 *Le théorème de stricte positivité* ($a < b$, f *continue sur* $[a, b]$, $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$ *et* $\int_a^b f(x)\, dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b]$, $f(x) = 0$), *fréquemment utilisé comme ici pour des démonstrations «générales» d'inégalités strictes, se démontre (en cas de besoin) en raisonnant par l'absurde et en prenant un intervalle* $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ *sur lequel* $f(x) \geq f(x_0)/2$, *puis en minorant l'intégrale par* $\alpha f(x_0)$.

3 *Si on n'avait pu obtenir directement* $\lim I_n$, *il aurait fallu utiliser la méthode d'encadrement esquissée dans l'introduction (et que l'on retrouvera en Spé en étudiant les intégrales d'une suite de fonctions convergeant simplement); on devrait alors rédiger ainsi la démonstration de convergence (vers* $\int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\, dx$*) :*

Soit $\varepsilon > 0$ fixé (< 1), posons $I_n = J_n + K_n$, avec $J_n = \int_0^{\pi/4-\varepsilon} (\tan x)^n\, dx$ et $K_n = \int_{\pi/4-\varepsilon}^{\pi/4} (\tan x)^n\, dx$. On a (inégalité de la moyenne) $0 \leq K_n \leq \varepsilon$ (puisque $\tan x \leq 1$) et $0 \leq J_n \leq (\pi/4 - \varepsilon)(\tan(\pi/4 - \varepsilon))^n$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ (puisque $a = \tan(\pi/4 - \varepsilon) < 1$ et que $\lim a^n = 0$).
On peut alors conclure si on sait que (I_n) *converge; sinon, on remarquera que :*
Prenant alors $\varepsilon = \varepsilon'/2$, on sait (par définition des limites) qu'il existe n_0 tel que, pour $n > n_0$, $|J_n| < \varepsilon'/2$ et donc $|I_n| < 2\varepsilon'/2 = \varepsilon'$, mais ceci étant vrai pour tout $\varepsilon' > 0$ c'est (par définition) que $\lim I_n = 0$.

Exercices types : Fiche n° 25

Étude d'une fonction définie par une intégrale

Énoncé.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$. Déterminer le domaine et les variations de f, ainsi que les limites aux bornes du domaine.

Méthode.

1 *Il convient d'abord de se rappeler que (dans le cadre du programme de Sup) l'intégrale sera définie si $g : t \mapsto 1/\ln t$ est continue (par morceaux) sur l'intervalle $[x, 2x]$. Ceci définit le domaine (mais les inéquations correspondantes ne sont pas toujours simples à résoudre).*

2 *Bien entendu, il n'est pas question de «calculer» f : même lorsque c'est possible (par exemple pour la primitive de $1/(x^6+1)$), la forme du résultat est souvent extrêmement compliquée et inutilisable; mais le plus souvent, comme ici, l'intégrale ne peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires.*

3 *La dérivée de f est en revanche «triviale» : appelant G une primitive de g, on a en effet $f = G(2x) - G(x)$, d'où $f'(x) = 2g(2x) - g(x)$.*

4 *Certaines limites de fonctions de ce type sont aisées à obtenir, mais en général, il faudra encadrer l'intégrale, soit par la formule de la moyenne, soit dans des cas plus difficile, en encadrant la fonction g; ici, on pourra par exemple remarquer que (pour t assez proche de 1) l'on a (Taylor) $t - t^2/2 \leq \ln(1+t) \leq t$. Cette méthode ne permet pas, le plus souvent, d'obtenir une limite précise, mais seulement une preuve d'existence...*

Solution.

1 f est définie pour toute valeur de x telle que $[x, 2x] \subset D_g$, avec $g(t) = 1/\ln t$; on doit donc avoir $[x, 2x] \subset]0,1[\cup]1, +\infty[$, c'est-à-dire $x > 0$ et $2x < 1$ ou $x > 1$. On en déduit donc que $D_f =]0, 1/2[\cup]1, +\infty[$.

2 Soit G une primitive de g; on a (par définition) $f(x) = G(2x) - G(x)$ pour tout $x \in D_f$. f est donc dérivable sur tout son domaine, et on a (par dérivation de fonction composée)

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\ln(2x)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2\ln x - (\ln x + \ln 2)}{\ln x \ln(2x)};$$

comme, sur D_f, on a $\ln x \ln(2x) > 0$, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$1/2$		1		2		$+\infty$
signe de $\ln x - \ln 2$		$-$	‖	//////	‖	$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	‖	//////	‖	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

3 D'après la formule de la moyenne, on a $f(x) = (2x - x)g(c) = x/\ln c$, avec $x < c < 2x$. On en déduit, pour tout x, l'encadrement $x/\ln(2x) < f(x) < x/\ln x$. Or les deux fonctions encadrantes ont mêmes limites en 0 et en $+\infty$; les théorèmes d'encadrement nous donnent donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Cette méthode ne peut s'appliquer ni en 1, ni en 1/2 ; montrons que $f(x)$ n'est pas majorée sur l'intervalle $]1, 2[$. On sait en effet que pour tout $u > -1$, on a $\ln(1+u) < u$ (ce résultat peut se démontrer par une étude directe, mais il résulte de la formule de MacLaurin à l'ordre 2 appliquée à $u \mapsto \ln(1+u)$, puisque $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2(1+\theta u)^2}$) ; il en résulte, par majoration sur l'intervalle $[x, 2x]$, que pour $x > 1$,

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t},$$

et donc que $f(x) \geq \ln|2x-1| - \ln|x-1|$. Or $\lim_{x\to 1} \ln|2x-1| - \ln|x-1| = +\infty$; on voit donc que $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$. En 1/2, le tableau de variation montre qu'on doit plutôt rechercher une majoration de f ; la formule de MacLaurin montre que $\ln(1+u) \geq u - u^2/2$, et donc que (pour $t \in [x, 2x]$, avec $x < 1/2$) $1/\ln t \leq 1/((t-1) - (t-1)^2/2)$. On obtient donc

$$f(x) \leq \int_{x-1}^{2x-1} \frac{2du}{2u - u^2}$$

$$f(x) \leq \int_{x-1}^{2x-1} \left(\frac{1}{2-u} + \frac{1}{u}\right) du \quad \text{(en décomposant en éléments simples)}$$

$$f(x) \leq \ln\frac{|2x-1|}{|x-1|} - \ln\frac{|3-2x|}{|3-x|},$$

et commme cette expression a pour limite $-\infty$ en 1/2, on a donc $\lim_{x\to 1/2} f(x) = -\infty$.

Remarques.

1 *On aura remarqué le soin apporté à la détermination de D_f ; en particulier, il ne suffit pas en général, pour que f soit définie, que les bornes de l'intégrale appartiennent à D_g !*

2 *Pour le calcul des limites, le choix de la méthode découle en partie de l'étude des variations ; on remarquera aussi qu'on a utilisé l'encadrement (de $\ln(1+u)$) par le DL_2 seulement dans le cas le plus délicat, et il vaut mieux, en général, encadrer plutôt par des polynômes, qui sont les seules fonctions aisément intégrables.*

3 *Les deux intégrales encadrantes étant calculables, et les variations de f étant connues, on voit qu'on aurait pu conclure dans tous les cas : si par exemple f était majorée sur $[1, 2]$, on en aurait déduit que la limite en 1 de f était finie...*

4 *Ces méthodes seront systématisés en Spé : il s'agit de ce qu'on appelle des intégrales impropres (on dira par exemple que nous avons cherché à déterminer $f(1)$, et montré que l'intégrale $\int_1^2 g(t)\,dt$ diverge) ; des critères simples d'étude seront donnés alors, permettant de remplacer g par une fonction équivalente dont on connaît les primitives.*

Exercices types : Fiche n° 26

Résolution d'une équation différentielle par «analogie»

Énoncé.

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $4x^2y''+y=0$ (on commencera par rechercher les solutions de la forme Kx^α, puis on appliquera la méthode de «variation de la constante»). En déduire les solutions de l'équation sur $\mathbf{R}$.

Méthode.

1 *On commence par vérifier à quel type correspond l'équation (ici, linéaire du second ordre, sans second membre); cependant, les coefficients n'étant pas constants, la méthode du cours ne s'applique malheureusement pas.*

2 *Par substitution et identification, il est aisé de «tester» la fonction proposée; on constate bien l'existence d'une solution particulière de la forme souhaitée, mais il en faudrait deux pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy...*

3 *On peut espérer, cependant, que la méthode de «variation de la constante» fera apparaître les simplifications habituelles : posant $y = K(x).x^\alpha$, et substituant, on constate en effet que l'équation correspondante ne fait intervenir que K' et K'', et donc qu'elle peut être complètement résolue; du coup, la rédaction finale ne fera pas intervenir le théorème de Cauchy (qu'on rappellera pourtant, à fin de confirmation du résultat).*

4 *Plutôt que de chercher des solutions sur $\mathbf{R}^-$, et d'essayer de les raccorder, on se contentera de remarquer que seule la fonction nulle est un prolongement $\mathcal{C}^1$ (en 0) des solutions trouvées...*

Solution.

1 Déterminons d'abord les solutions de l'équation $(*)\quad 4x^2y''+y=0$ de la forme $y(x)=Kx^\alpha$ (pour tout $x>0$). En substituant, on obtient $K(4\alpha(\alpha-1)+1)x^\alpha=0$, et donc $K=0$ ou $(2\alpha-1)^2=0$; les seules solutions de ce type sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto K\sqrt{x}$. Cherchons alors les fonctions inconnues $K : x\mapsto K(x)$ telles que $f : x\mapsto K(x)\sqrt{x}$ soient solutions de $(*)$ (K doit donc être une application de classe $\mathcal{D}^2$ de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$, et, utilisant une récurrence simple et l'équation $(*)$, on montrerait en fait que K doit être de classe $\mathcal{C}^\infty$). On a (d'après la formule de Leibnitz) $f''(x)=K''(x)x^{1/2}+K'(x)x^{-1/2}-\dfrac{K(x)x^{-3/2}}{4}$; $K(x)$ doit donc vérifier $K''(x)x^{1/2}+K'(x)x^{-1/2}=0$, c'est-à-dire $(**)\quad xK''(x)+K'(x)=0$. Or cette équation différentielle équivaut (en posant $Y=K'$) à l'équation linéaire du premier ordre $xY'+Y=0$, équivalente (si $Y\neq 0$) à $Y'/Y=(\ln|Y|)'=-1/x$, et dont on sait qu'elle a pour solution (sur $]0+\infty[$) $Y=a/x$, avec a constante. On en déduit donc que $K(x)=a\ln x+b$ (avec a et b constantes), et en définitive, que les solutions de $(*)$ sont de la forme $x\mapsto(a\ln x+b)\sqrt{x}$ (elles sont donc combinaisons linéaires des fonctions non proportionnelles $x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto\sqrt{x}\ln x$, comme le veut le théorème de Cauchy (linéaire) pour les équations différentielles du second ordre). Ces fonctions ne se prolongent (par continuité) en 0 que si $a=0$, et le prolongement n'est $\mathcal{C}^1$ que si $b=0$; la seule solution de l'équation $(*)$ sur $\mathbf{R}$ tout entier est donc la fonction nulle (qui convient trivialement).

Remarques.

1 *Sans les indications de l'énoncé, ce type d'équation ne pourrait être résolu ; on verra en Spé quelques méthodes supplémentaires d'approche ; mais les rares problèmes de concours étudiant une équation telle que $xy'' + y' + xy = 0$ (dont les solutions sont des «fonctions de Bessel», non exprimables même à l'aide d'intégrales) sans pouvoir (et pour cause) en déterminer une solution explicite, sont d'une difficulté redoutable, et contraire à l' «esprit TSI» ...*

2 *Si on avait obtenu deux solutions particulières non proportionnelles (par exemple en résolvant $4x^2y'' = 3y$ de la même manière, on obtient $x \mapsto Kx^{3/2}$ et $x \mapsto Kx^{-1/2}$), on aurait pu appliquer le théorème de Cauchy pour en déduire la solution générale ; mais la méthode proposée par l'exercice permet de conclure sans faire appel à une théorie «admise» ...*

3 *On a vu que la solution proposée fait allusion à ce théorème (en le «confirmant», c'est-à-dire en montrant comment il est effectivement vérifié dans ce cas) ; cela n'est évidemment pas nécessaire, mais c'est le modèle suggéré (lorsque cela n'alourdit pas à l'excès la rédaction) pour montrer la maîtrise du cours dans des contextes d'écrits ou d'oraux de concours.*

4 *Bien que l'énoncé puisse laisser subsister un doute, il n'était guère raisonnable d'envisager de faire varier l'autre constante : posant $y(x) = x^{\alpha(x)} = e^{\alpha(x)\ln x}$ (et laissant plutôt les calculs à Maple V), on obtient, hélas, une équation très compliquée, mais surtout dont l'ordre ne s'est pas abaissé : la méthode de «variation» n'est en général efficace que pour des solutions particulières de la forme $Kf_0(x)$...*

5 *On sait que l'analyse qui conduit de $(\ln|Y|)' = -1/x$ à $Y = a/x$ n'est nullement évidente : le plus simple ici (si l'on ne veut pas simplement rappeler le théorème de Cauchy) est de raisonner «à l'envers» par une nouvelle méthode de variation de la constante :* `«Posant` $Y = a(x)/x$`, on a` $xY' + Y = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a'(x) = 0$`, donc` a `est constante sur` $\mathbf{R}^+$`»`. *Mais le cas général (équations non linéaires, par exemple) nécessite parfois une sophistication considérable (et largement hors programme) : on montre d'abord que les solutions partout non nulles sont de la forme annoncée, puis que si une solution f s'annulait en un point de I, mais n'était pas toujours nulle, on aurait, en posant $a = \inf\{x \in I \mid f(x) \neq 0\}$, et par continuité, f de la même forme sur un intervalle $]a, a+\varepsilon[$; enfin, on aurait alors (toujours par continuité) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = 0$; on calcule alors «explicitement» $f(a)$, et on en déduit une contradiction...*