Une démonstration surprenante de la non-dénombrabilité de $\mathbf{R}$

Cette démonstration est une adaptation d'une démonstration récente de Eliahu Levy (dont on trouvera l'original à `http://arxiv.org/abs/0901.0446`), elle-même utilisant une idée de Nicolas Bourbaki.

On utilise comme seule propriété de $\mathbf{R}$ (outre qu'il contient $\mathbf{Q}$ et est totalement ordonné) le fait que tout sous-ensemble S non vide majoré admet une borne supérieure (notée $\sup S$). On va raisonner par l'absurde, en supposant que $\mathbf{R}$ est dénombrable et que tout réel s'écrit $x = f(n)$, où f est une bijection et $n = f^{-1}(x) = g(x) \in \mathbf{N}$; posons $a(x) = 2^{-g(x)}$ et, pour tout $S \subset \mathbf{R}$ ($S \neq \emptyset$), $m(S) = \sup_{A \text{ fini } \subset S}(\sum_{x \in A} a(x))$; il est clair que $0 < m(S) \leq 2$. Soit alors c la borne supérieure de l'ensemble E des x tels que $m(]-\infty, x[) > x$; elle existe, puisque E est majoré par 2 et contient tous les réels négatifs ou nuls; de plus, comme $m(]-\infty, 0[) = b > 0$, on voit que $m(]-\infty, b/2[) > b/2$, donc que $c \geq b/2 > 0$. Comme $a(c) > 0$, $\sup(c - a(c), 0)$ n'est pas un majorant de E (par définition de la borne supérieure), et il existe donc un $y \in E$ tel que $y > c - a(c)$ et $y > 0$, et donc $m(]-\infty, y[) > y$ et $c \notin]-\infty, y[$. Mais $c \in]-\infty, y + a(c)[$, donc, par définition de m, on aura $m(]-\infty, y + a(c)[) \geq m(]-\infty, y[) + a(c) > y + a(c)$, on devrait donc avoir $y + a(c) \leq c$, ce qui est absurde.