Géométrie projective et cercles de Villarceau

La démonstration qui suit (et que je dois à mon professeur de math sup, M. Bérard) demande sans doute quelques éclaircissements et précisions ; ils font l'objet de la deuxième partie.

1 Cercles de Villarceau.

Théorème (Villarceau, 1838). *L'intersection d'un tore avec un de ses plans bitangents est la réunion de deux cercles.*

Démonstration : L'intersection du tore avec le plan à l'infini est l'ombilicale (d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$), comptée deux fois. L'intersection avec le plan bitangent est donc une quartique possédant quatre points doubles, ce qui montre qu'elle est dégénérée en deux coniques, se recoupant aux points cycliques, et qui sont donc deux cercles.

2 Compléments à cette démonstration.

On se place dans l'espace projectif complexe (le quotient de $\mathbf{C}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\}$ par la relation d'équivalence $\mathbf{u} \simeq \mathbf{v} \iff$ la famille $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est liée). On l'identifie à $\mathbf{C}^3$ (par exemple en associant à (x, y, z) la classe d'équivalence de $(x, y, z, 1)$), complété par un «plan à l'infini», ensemble des classes d'équivalence des vecteurs de la forme $(X, Y, Z, 0)$. La démonstration précédente peut alors être rendue rigoureuse à l'aide des 9 lemmes suivants, tous élémentaires sauf le lemme de Bezout.

Lemme 1. *L'équation (cartésienne) d'un tore d'axe Oz, de rayon intérieur $R - a$ et de rayon extérieur $R + a$, est $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - a^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$.*

En effet, dans le demi-plan $(O, \overrightarrow{u}, Oz)$, le cercle radial a pour équation (en coordonnées cylindriques) $(\rho - R)^2 + z^2 = a^2$; comme $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, le résultat s'en suit aisément.

Lemme 2. *Les points cycliques d'un plan (projectif) sont les points à l'infini de tous les cercles de ce plan. Les coordonnées (projectives) de ces points sont $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$.*

En effet, le cercle d'équation cartésienne $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, ayant pour équation projective $(X - aZ)^2 + (Y - bZ)^2 = R^2Z^2$, a pour points à l'infini (donc pour $Z = 0$) les solutions de $X^2 + Y^2 = 0$.

Lemme 3. *L'ensemble de tous les points cycliques de tous les plans est l'ombilicale, courbe du plan à l'infini d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ (et $T = 0$).*

Le plus facile est de remarquer que tout cercle est contenu dans une sphère, dont l'intersection avec $T = 0$ est évidemment l'ombilicale.

Lemme 4. *L'intersection d'un tore avec le plan à l'infini est l'ombilicale (comptée deux fois).*

Cela résulte aisément du lemme 1, en remplaçant x par X/T, y par Y/T et z par Z/T dans l'équation cartésienne, puis en posant $T = 0$.

Lemme 5 (Bezout). *L'intersection de deux courbes algébriques de degrés m et n (n'ayant pas de composante commune) se fait en mn points (en comptant les multiplicités).*

Une preuve rigoureuse utilise le *résultant*; intuitivement, en raisonnant par substitution, on devine que le polynôme correspondant au système des deux équations des deux courbes sera de degré mn.

Lemme 6. *L'intersection d'un plan tangent à une surface algébrique et de cette surface est une courbe algébrique de même degré que la surface, admettant un point double au point de tangence.*

Le résultat sur le degré s'obtient trivialement en substituant l'équation du plan. Le point double résulte de l'annulation des dérivées partielles (on peut l'obtenir en appliquant la formule de Taylor au voisinage du point de tangence).

Lemme 7. *L'intersection d'un tore avec un de ses plans bitangents est une quartique (une courbe de degré 4) admettant quatre points doubles.*

En effet, deux des points doubles résultent du lemme précédent; les deux autres sont les points à l'infini, situés sur l'ombilicale, et qui sont doubles puisque cette courbe est comptée deux fois d'après le lemme 4.

Lemme 8. *Une quartique admettant quatre points doubles est la réunion de deux coniques.*

Considérant une conique passant par les quatre points doubles et par un cinquième point de la quartique, on voit qu'elle coupe celle-ci en 9 points (compte tenu des multiplicités), et d'après le lemme de Bezout, elle est donc incluse dans la quartique, d'où le résultat.

Lemme 9. *Une conique passant par les points cycliques est un cercle.*

C'est presque évident, car les deux points d'intersection de la conique $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ avec la droite de l'infini vérifient $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, donc $x^2 + y^2 = 0$ (et $a = c$, $b = 0$) si les deux points sont $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$.